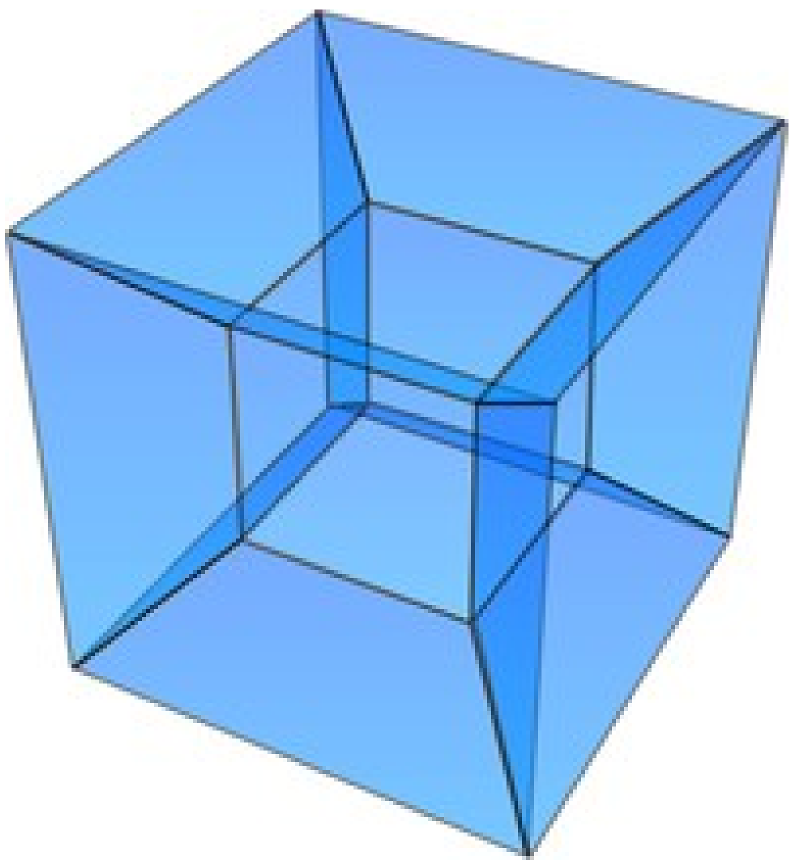
Dimensies

een ruimtelijke tocht langs onbekende assen



Anne-Lotte van der Kooi
Jesse Krijthe
Roderik Vogels
Onder begeleiding van Aad Goddijn

Junior College Utrecht, Januari 2007

Inhoud

1. Abstract

Voor deze thesis hebben wij vierdimensionale meetkundige figuren onderzocht. Door gebruik te maken van onze kennis van meetkundige figuren in de eerste drie dimensies, analogieën, de stelling van Euler en dualiteit konden wij deze figuren onderzoeken. Ook al is het niet mogelijk om deze figuren te 'zien', toch zijn we er in geslaagd deze te onderzoeken en op verschillende manieren te beschrijven en weer te geven. Daarnaast zijn we ingegaan op het vierdimensionale kusgetal. Door onderzoek te doen naar de kusgetallen in de eerste drie dimensies kregen we een beter begrip van het probleem en konden we aantonen dat het vierdimensionale kusgetal 24 is. Er is nog veel meer te onderzoeken. Vervolg onderzoek kan gaan over fractals, de invloed van dimensies op kunst, geloof en het gebruik van meer dan drie dimensies in de natuurkunde.

2. Inleiding

We leven in een drie dimensionale wereld. Dit houdt in dat beweging in ruimte drie onafhankelijke richtingen kent. Elk punt in onze ruimte kan worden gedefinieerd door links/rechts, voor/achter en boven/onder. Deze drie richtingen worden ook wel vrijheidsgraden genoemd. Deze benaming is beeldend voor ons alledaagse leven. Zo kan een automobilist op een eenbaansweg terechtkomen, waar hij dus niet naar links of rechts kan. Hij zit dan vast in één dimensie, zijn enige mogelijkheid is naar voren. Eenmaal een stuk verder, komt er een tweede baan bij. Hij heeft dus meer vrijheid gekregen: hij kan nu ook naar links of rechts. Dat is de tweede dimensie. Van de derde dimensie kan de automobilist geen gebruik maken, behalve wanneer hij een James Bond-achtige auto met vleugels heeft, of, waarschijnlijker, links een afslag neemt die hem via een brug over de weg naar een dorpje aan de rechterkant van de weg leidt.

Figuur 2.1

Misschien denkt u bij het woord dimensie wel aan tekeningen van iemand als Escher, die met behulp van dimensies de ogen geraffineerd weet te bedriegen of uw logisch (in)zicht kan verwarren. Mogelijk denkt u zelfs aan Einsteins relativiteitstheorie, en aan tijd als de vierde dimensie. In dat geval komt u al aardig dicht in de buurt van waar onze thesis over gaat, hoewel deze thesis zich voornamelijk beperkt tot de meetkundige aanwezigheid van meerdimensionale figuren, dan zich bezighoudt met de toepassing daarvan.

In onze thesis gaan we in op meetkundige figuren in verschillende dimensies, en dan in het bijzonder in zogenaamde 'hogere' dimensies. We onderzoeken met behulp van analogieën. Analogie is een van de middelen om vat te krijgen op wat we ons niet kunnen voorstellen, door gebruik te maken van dingen die we wel weten in bijvoorbeeld een dimensie minder. Analogieën gebruiken we tussen bijvoorbeeld de derde en vierde dimensie, maar ook tussen de tweede en derde. Bij regelmatige veelvlakken, kusgetallen, combinatoriek en het beschrijven van de hyperkubus hebben we bijvoorbeeld de stappen voor de tweede dimensie uitgebreid tot de derde, en zo weer tot de vierde dimensie. Dit is een goede manier om meer te ontdekken over de eigenschappen van meerdimensionale figuren. Wij richten ons op regelmatige figuren in de verschillende dimensionale ruimtes.

Onderzoeksvraag

Wij willen onderzoeken wat de verbanden zijn tussen de eigenschappen van regelmatige figuren in verschillende dimensionale ruimtes, en hoe deze kennis van die eigenschappen bruikbaar is voor het construeren van andere

figuren. Gebruik van analogieën zal daarbij belangrijk zijn. We zijn ook benieuwd naar de aanwezigheid van regelmaat tussen de eigenschappen in verschillende dimensies.
Ook willen we kijken of wij een 24-cel - een figuur dat geen analogieën kent in andere dimensies - kunnen maken en de eigenschappen ervan kunnen bepalen. Een groot deel van ons onderzoek werken we dus met analogieën, bij de 24-cel kan dit juist niet.

Motivatie

Bij het onderzoek naar dimensies moeten we niet alleen analytisch kunnen nadenken, maar moeten we ook gebruik maken van ons voorstellingsvermogen. Dit is lastig, omdat de vierdimensionale ruimte in wezen toch een abstract begrip blijft. De combinatie van analytisch en abstract is zeer uitdagend en vernieuwend voor ons. Bovendien zijn wij met meetkunde tot nu toe vooral in het platte vlak bezig geweest. Het onderzoek naar meetkundige figuren in andere dimensies dan twee is voor ons dus vrijwel nieuw. Bovendien weten we dat er een zekere vorm van regelmaat moet zijn die we vooral bij combinatoriek verwachten terug te zien komen. Aanwijzingen voor regelmaat zijn bijvoorbeeld het gebruik (kunnen maken) van analogieën en het Binomium van Newton. We zijn benieuwd naar hoe ver die regelmaat gaat, en hoeveel we van die regelmaat kunnen ontdekken.

3. De hyperkubus

De hyperkubus is de vierdimensionale variant van de ‘gewone’ driedimensionale kubus. Bij het bestuderen van een vierdimensionale ruimte kan je bijna niet om de hyperkubus heen. Aan de ene kant omdat het het makkelijkst te begrijpen vierdimensionale figuur is. Helemaal begrijpen kan je het nooit, omdat wij mensen gewoon niet in staat zijn om een vierde dimensie waar te nemen. Wij kunnen ons een echte vierdimensionale kubus dus niet voorstellen, omdat de meerdimensionale wereld in zekere zin een meetkundig model is. Voor ons is ze niet tastbaar. Wij concentreren ons in deze thesis met name op die meetkundige eigenschappen van de (vierdimensionale) figuren, en niet zozeer op de maatschappelijke of praktische toepassingen van deze vierdimensionale ruimte. Om je in te leven in de vierde dimensie is een stukje verbeeldingskracht dus niet overbodig. Deze verbeeldingskracht sturen we natuurlijk wel. We sturen door te redeneren en bewijzen te zoeken. Een ander belangrijk en behulpzaam middel is de analogie.

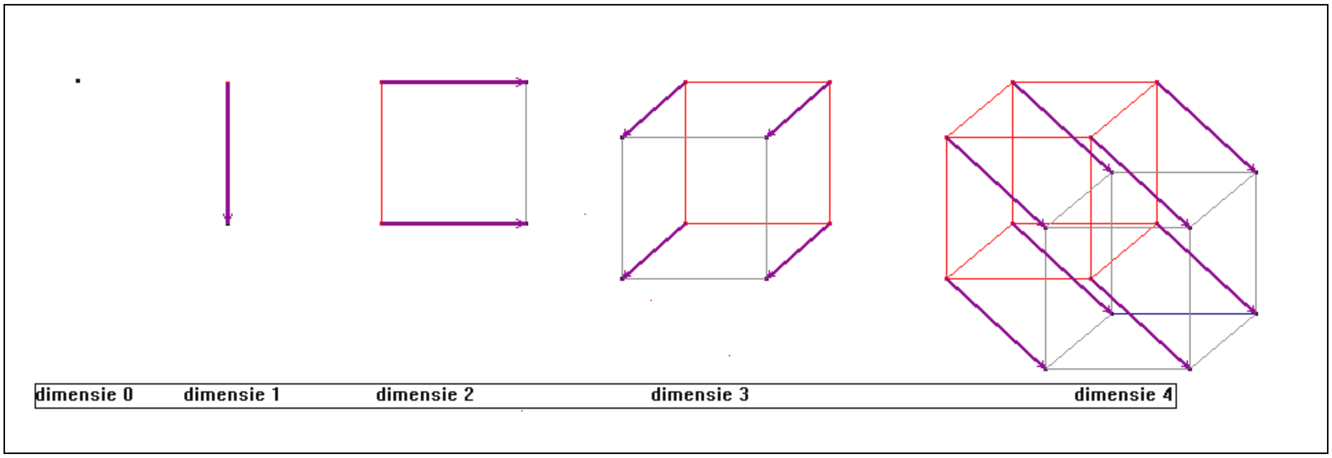
Verder helpt het om te beginnen bij het goed begrijpen van de hyperkubus, dat maakt het bestuderen van andere vierdimensionale figuren makkelijker. Reden genoeg om wat extra aandacht te besteden aan de hyperkubus.

3.1. Constructie

Om te kunnen bedenken hoe de hyperkubus er uitziet, zullen we, zoals vaker in deze thesis, gebruik gaan maken van analogieën. Een analogie is een verschijnsel dat vergelijkbaar is met het origineel. Door lering te trekken uit wat er in het parallelle geval gebeurt en dat te proberen toe te passen op het oorspronkelijke probleem, krijg je mogelijk meer inzicht in het probleem.

We zullen de analogie gebruiken op het ontstaan van lijnen, vierkanten en kubussen en daarna zullen we wat we geleerd hebben toepassen op de hyperkubus. We beginnen bij het begin, in de nulde dimensie, bij de punt. Dit is een vrij saaie dimensie, het enige mogelijke figuur is een punt. Om een lijn te krijgen moeten we in de eerste dimensie er een punt bijplaatsen. Verbinden we deze twee punten, dan krijgen we een lijn. Zie *Figuur 3.1.* Nu kunnen we hetzelfde doen met de lijn. Als we er een lijn in de tweede dimensie bijplaatsen en wel over een afstand die gelijk is aan de lengte van de eerste lijn, dan ontstaat er een vierkant. Om nu bij onze kubus uit te komen, is het enige wat we hoeven te doen een vierkant in de derde dimensie te plaatsen, over een afstand die gelijk is aan de lengte van de ribben van het vierkant. Als we dan beide vierkanten verbinden, hebben we onze kubus gekregen.

Om de hyperkubus te krijgen, is het enige wat nu hoeven te doen het herhalen van dit bijplaatsen, maar dan met de kubus. Neem een kubus en plaats het in de vierde dimensie. Verbind deze kubus met de kubus die je al had en je hebt de hyperkubus gevonden.



Figuur 3.1

3.2. Bestudering van de hyperkubus

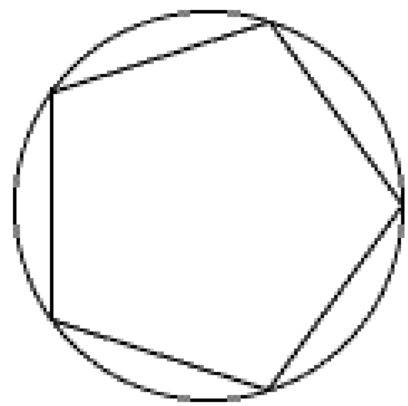
Om meer over de hyperkubus te weten te komen, is het handig om te weten hoeveel uit hoeveel punten, ribben, vlakken en cellen hij is opgebouwd. We weten dat de hyperkubus, zie ook *Figuur* 3.1, uit twee gewone kubussen bestaat die met elkaar verbonden zijn. Omdat elke kubus 8 punten heeft, heeft een hyperkubus dus 2 x 8 = 16 punten. Het aantal ribben van een hyperkubus is op een vergelijkbare manier te berekenen. Zoals gezegd bestaat een hyperkubus uit twee gewone kubussen die met elkaar verbonden zijn. Acht ribben (uit elk hoekpunt één) verbinden deze twee kubussen met elkaar. Het totale aantal ribben wordt dan 2 x 12 + 8 = 32.
Het aantal vlakken is al lastiger te berekenen. Het makkelijkst is waarschijnlijk gewoon de vlakken te tellen in *Figuur 3.1*, maar ook dat is niet heel eenvoudig. Daarom pakken we het zo aan: Je weet dat de twee kubussen (degene waarmee je begon en degene die in de vierde dimensie is geplaatst) samen 12 vlakken hebben. Door nu het aantal vlakken te tellen dat door de verbindende ribben wordt gevormd krijg je het totale aantal vlakken: 24.
Het aantal cellen is weer makkelijker te berekenen. Je hebt de cel van de kubus waarmee je begon. Elk vlak van deze kubus vormt door de verschuiving naar de vierde dimensie een cel. Dat zijn er dus 6 in totaal. Dan is er nog een cel over, en dat is de cel van de kubus die je in de vierde dimensie hebt geplaatst en vervolgens met de eerste kubus hebt verbonden. Samen geeft dit 1 + 6 + 1 = 8 cellen. Al deze cellen zijn kubussen, omdat de ribben allemaal even lang zijn en alle ribben een haakse hoek met elkaar maken.
Dan is er nog maar een ding over wat we moeten weten, en dat is het aantal vierdimensionale cellen dat de hyperkubus heeft. Dat is er maar 1, namelijk het ding in zijn geheel.

Samenvattend, een hyperkubus heeft 16 punten, 32 ribben, 24 cellen en 1 vierdimensionale cel.

4. Regelmatige veelvlakken

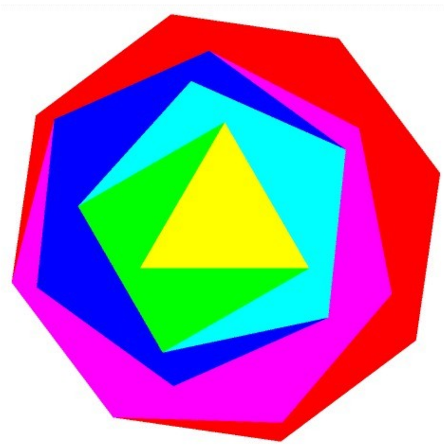
De studie naar regelmatige veelvlakken is van levensbelang geweest voor de ontwikkeling van de meetkunde. De oude Grieken waren al gefascineerd naar regelmatige veelhoeken en wisten al veel over het bewijzen van het bestaan, en het construeren ervan. Later verschoof de interesse naar de regelmatige figuren in drie dimensies: de regelmatige veelvakken. Ook in het onderzoek naar de 4 dimensionale meetkunde zijn veelvlakken van groot belang geweest, mede doordat ze de mogelijkheid bieden om er bewijzen uit te laten volgen. In deze thesis gaat het vooral over regelmatige veelvlakken. Vandaar dat een korte inleiding hiertoe wel op zijn plaats is.

4.1. 2 dimensies: regelmatige veelhoeken



Figuur 4.1:
Een regelmatige vijfhoek

De oud Griekse meetkunde richtte zich zeer sterk op de studie van regelmatige veelhoeken. Om deze figuren te tekenen hadden ze zichzelf echter wel een beperking opgelegd: ze mochten alleen gebruik maken van een passer en een liniaal zonder maten erop. Een regelmatige veelhoek ziet er bij elk hoekpunt hetzelfde uit, en alle zijden zijn ook hetzelfde (Banchoff, 1996). Daarnaast is er aansluiting: de regelmatige veelvlakken zijn gesloten figuren. Dit betekend dus dat je altijd een binnen gebied en een buiten gebied hebt. Een mooie manier om deze figuren te vinden is door een cirkel te nemen en deze cirkel te verdelen in gelijke koorden. In *Figuur 4.1* is de cirkel verdeeld in 5 gelijke koorden. Dit betekent dus ook dat alle zijden van het figuur gelijk zijn. Ook zien alle hoekpunten er hetzelfde uit: iedere hoek is 360/5=72 graden. Deze figuur voldoet dus aan de definitie van een regelmatige veelhoek. Je kunt je voorstellen dat je de cirkel ook in 3, 5, 10, 50 of elk willekeurig aantal stukken had kunnen verdelen. Al deze figuren zouden ook voldoen aan de definitie van een regelmatige veelhoek. Dit betekent dus dat er een onbegrensd aantal regelmatige veelhoeken zijn in twee dimensies, je kunt de cirkel immers in een onbegrensd aantal stukjes verdelen. In *Figuur 4.2* is deze onbegrensdheid mooi weergegeven. De bedenker van deze zogenaamde veelhoekspiraal, Max Bill (1908-1994, Zwitserse kunstenaar met grote belangstelling voor de wiskunde), gebruikt steeds lijnen van dezelfde lengte en maakt de hoek steeds groter. Zoals in de figuur te zien is slaat hij telkens een zijde over en vormt dan de basis van de volgende regelmatige veelhoek op daarop volgende zijde. Hier zou hij tot in het



Figuur 4.2:
De veelhoek spiraal

oneindige mee door kunnen gaan.

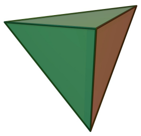
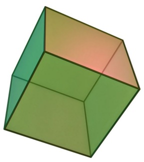
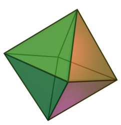
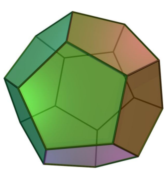
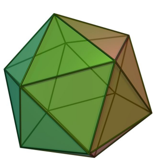
We hebben nu door redeneren aangetoond dat deze wiskundige objecten bestaan. Dit betekent echter nog niet dat we ze ook exact, met alleen een passer en een liniaal zonder maatstrepen, kunnen maken. Een bekend voorbeeld is de regelmatige negenhoek. Deze zou geconstrueerd moeten worden door de koorden bij de driehoek in drieën te delen. Dit is echter niet mogelijk in een tweedegraadsvergelijking: een andere manier om te zeggen dat dit niet kan met alleen een liniaal en een passer. Dit bekent niet dat de regelmatige negenhoek niet bestaat, wij kunnen hem alleen niet exact construeren met een passer en een liniaal. (Door middel van goniomerische functies is deze overigens wel te construeren, vandaar dat computerprogramma's als Cabri het wel kunnen). Het feit dat we aan kunnen tonen dat ze bestaan, betekent dus nog niet dat we ze ook kunnen (gemakkelijk) kunnen construeren.

4.2. 3 dimensies: regelmatige veelvlakken

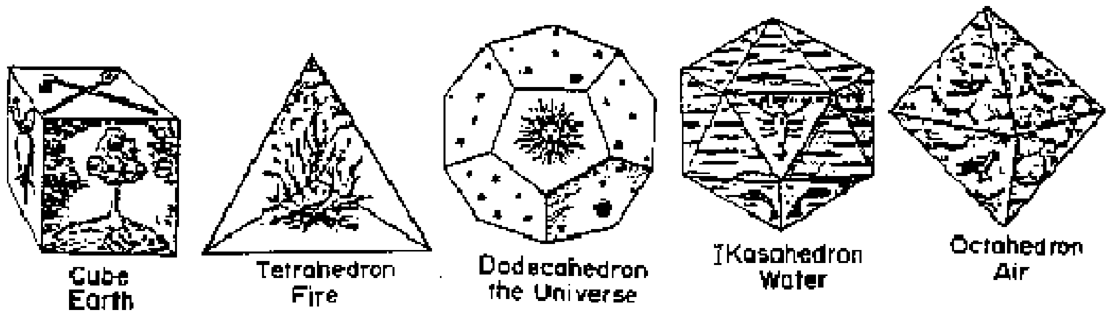
Natuurlijk kenden de oude Grieken niet alleen het platte vlak. Hun studie ging door naar objecten in ruimte. Een aantal objecten in de ruimte waren al net zo bekend bij de Grieken als dat ze voor ons zijn, zoals de tetraëder (viervlak), de octaëder (achtvlak) en natuurlijk de hexaëder (zesvlak), oftewel de kubus. Het woord kubus is Grieks voor bikkel of dobbelsteen. Deze figuren waren alom bekend en gebruikt, maar zijn het ook regelmatige veelvlakken?

De definitie van een regelmatig veelvlak is dat het een figuur is dat opgebouwd is uit een bepaalde regelmatige veelhoek, en op ieder hoekpunt komt eenzelfde aantal van die veelhoeken bij elkaar. Ook is het een gesloten figuur: er zitten dus geen gaten in. Belangrijk is dat we in dit onderzoek alleen maar kijken naar convexe regelmatige veelvlakken. Dit betekent dat er geen 'deuken' in het veelvlak mogen zitten. Volgens deze definitie blijkt dat de tetraëder, octaëder en de kubus, allemaal regelmatige veelvlakken zijn. Later vonden de Grieken nog twee regelmatige veelvlakken: de dodecaëder (twaalfvlak) en de icosaëder (twintigvlak). In *Tabel 4.1* is een mooi overzicht te zien van deze regelmatige veelvlakken, ook wel de platonische veevlakken genoemd.

Tabel 4.1: Regelmatige veelvlakken in drie dimensies

Figuur	**Opgebouwd uit**	**Aantal veelhoeken per hoekpunt**	**Systematische naam**	**Naam**
	driehoeken	3	Tetraëder	Simplex
	vierkanten	3	Hexaëder	Kubus
	driehoeken	4	Octaëder	Kruisfiguur
	vijfhoeken	3	Dodecaëder	Twaalfvlak
	driehoeken	5	Icosaëder	Twintigvlak

De oude Grieken wisten dus al dat er maar vijf regelmatige veelvlakken zijn. De Platonische veelvlakken hebben altijd een grote fascinatie op de mens uitgeoefend. Er zijn allerlei magische eigenschappen aan toegedicht. Zo hebben ze bijvoorbeeld model gestaan voor de vier elementen en de kosmos (zie *Figuur 4.3*).



Figuur 4.3:
Veelvlakken gekoppeld aan de elementen

De Grieken hadden dan wel vijf regelmatige veelvlakken gevonden, maar hiermee was het bewijs nog niet geleverd dat het er ook precies vijf waren. Het bewijs hiervoor kwam van Euclides in het laatste deel van zijn boek De Elementen.

De eerste stap in het bewijs is te kijken naar de som van de hoeken die samenkomen bij een hoekpunt. Deze moet minder zijn dan 360 graden. Als de hoeken 360 graden zouden zijn zou er een plat vlak zijn oftewel: geen driedimensionaal figuur. Er moet namelijk ruimte zijn om te vouwen rond de hoek. Je krijgt bij ieder hoekpunt dus een soort piramidevorming, omdat het punt hoger komt te liggen dan de lijnen die in het punt samenkomen. Dit geld natuurlijk alleen als er geen deuken in de figuur zitten (dus als de figuren convex zijn), maar we hadden eerder al gezegd dat we alleen naar convexe figuren zouden kijken. Meer dan 360 graden kan ook niet omdat er ook dan niet convexe figuren ontstaan.

De tweede stap is om te kijken hoeveel zijvlakken er minimaal bij een hoekpunt samen komen. Het minimum wat hiervoor geldt is drie. Eén zijvlak per hoekpunt zou immers betekenen dat je een vlak hebt, en twee zijvlakken per hoekpunt levert nooit een volledig gesloten figuur op.

Met deze twee gegevens kunnen we vervolgens de regelmatige veelhoeken systematisch afgaan. Als we nu regelmatige veelvlakken met driehoeken willen maken hebben we nog maar drie mogelijkheden: 3, 4 of 5 driehoeken per hoekpunt. Het minimum is namelijk 3 en het maximum in dit geval 5 omdat 6 driehoeken bij een hoekpunt een hoekensom van 360 graden geeft, en dit kan niet volgens onze eerste stap. De drie figuren die we nu in het bewijs hebben gevonden hadden we al eerder gezien: 3 driehoeken per hoekpunt geeft de tetraëder, 4 geeft de octaëder en 5 geeft de icosaëder.
De volgende in de reeks regelmatige veelhoeken is het vierkant. Deze kan alleen figuren vormen met 3 vierkanten

per hoekpunt. 4 vierkanten levert immers een hoekensom van 360 graden. Dit figuur met 3 vierkanten per hoekpunt kennen we ook al: de kubus.
Na het vierkant komt de vijfhoek. Hiermee kant een figuur gemaakt worden met 3 vijfhoeken per hoekpunt: de dodecaëder. Meer kan niet: 4 vijfhoeken levert een hoekensom van 4*108=432 graden. Te veel dus.

Als we nu naar de volgende regelmatige veelhoek kijken komt het bewijs rond: 3 zeshoeken bij een hoekpunt levert een hoekensom van 120*3=360 graden. Met de zeshoek kan er dus zelfs geen regelmatig veelvlak gemaakt worden met 3 zeshoeken per hoekpunt. De veelhoeken die op de zeshoek volgen hebben alleen nog maar grotere hoeken. Hiermee kunnen dus ook geen regelmatige veelvlakken gevormd worden. En zo is het bewijs geleverd dat er in 3 dimensies slecht 5 regelmatige veelvlakken kunnen bestaan: de tetraëder, de kubus, de octaëder, de dodecaëder en de icosaëder. Belangrijk is dat we slechts hebben bewezen dat er vijf kunnen bestaan. Het echte bestaan van deze vijf figuren zelf hebben we nog niet bewezen.

4.3. 4 dimensies: regelmatige veelcellen

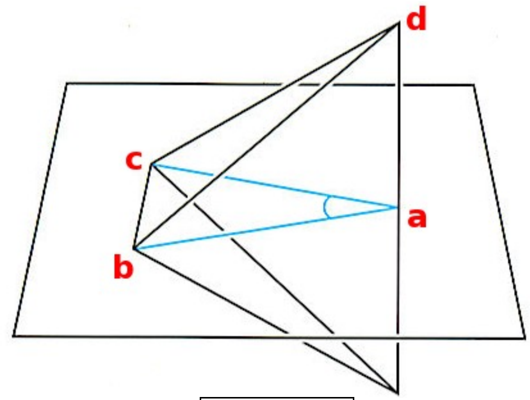
Figuren in vier dimensies zijn veel moeilijker voor te stellen dan die in drie dimensies. Toch kunnen we heel veel zeggen over vierdimensionale regelmatige veelvlakken. Veel technieken die we eerder hebben gezien kunnen we simpelweg vertalen naar een ruimte met een extra dimensie en zo kunnen we zonder de figuren echt te zien, een hoop te weten komen over deze figuren.

Laten we Euclides' techniek toepassen op de vier dimensionale ruimte. Omdat we er een dimensie bij hebben kijken we niet meer naar de hoekpunten, maar naar de ribben van het figuur, en in plaats van veelhoeken kijken we naar regelmatige veelvlakken. Kortom: als we bepalen hoeveel mogelijkheden er zijn regelmatige veelvlakken rond een ribbe te leggen, weten we het aantal regelmatige veelvlakken in de vierde dimensie.

Het makkelijkste figuur om naar te kijken is de kubus. Deze heeft hoeken van 90 graden. Weer geldt de regel dat de som van de hoeken om de ribbe minder moet zijn dan 360 graden, anders is er geen ruimte om de figuur te vouwen in de vierde dimensie. Dit vouwen werkt in principe hetzelfde als het vouwen in de drie dimensionale ruimte. Daarbij heb je een plat vlak en door ribben tegen elkaar te plakken krijg je een drie dimensionaal figuur. De vier dimensionale analoog is dan dat je de vlakken van de 3 dimensionale figuren (in dit geval kubussen) tegen elkaar plakt. Wij kunnen ons dit moeilijk voor stellen omdat wij geen vierde dimensie kennen om het in te vouwen. We kunnen het dus nooit echt uitvoeren. Wel kunnen we bedenken welke vlakken tegen elkaar aan zouden komen liggen.

Ook hebben we weer minimaal 3 veelvlakken nodig. 3 kubussen rondom een ribbe levert een hoeksom op van

3*90=270 graden. Genoeg ruimte dus om nog te vouwen in de vierde dimensie. 4 kubussen rond een ribbe levert een hoekensom van 4*90=360, en laat dus geen ruimte over om te vouwen. Meer kubussen laten ook geen ruimte over om te vouwen. Met kubussen is dus maar één figuur te maken in vier dimensies: namelijk met 3 kubussen rondom een lijn.



Figuur 4.4

Vervolgens is de simplex aan de beurt. Bij de simplex is het eerst handig om te kijken naar de grootte van de hoek. Als we ons de ribbe verticaal voorstellen krijgen we een simplex zoals in *Figuur 4.4.* Van driehoek dbc weten we dat deze gelijkzijdig is. Alle drie de hoeken zijn dus 60 graden. Door de stelling van Pythagoras toe te passen is snel te zien dat db langer is dan ab. Ook is dc langer dan ac om dezelfde reden. Driehoeken dbc en abc hebben verder zijde bc gemeen. Driehoek abc heeft 2 kortere zijden dan driehoek dbc. Hieruit volgt dat hoek a groter is dan hoek d en dus groter dan 60 graden. Dit kunnen we ook exact berekenen. Hiervoor gebruiken we voor het gemak een simplex met ribben van lengte 1.

$$d(a,b) = \sqrt{d(d,b)^2 - d(a,d)^2} = \sqrt{1^2 - 0{,}5^2}$$
$$hoeka = 2 * \sin^{-1}(0.5a) = 2 * \sin^{-1}(0{,}5d(b,c)/d(a,b) = 2 * \sin^{-1}(0.5/\sqrt{1^2 - 0{,}5^2}) \approx 70{,}5^o$$

Dit betekent dus dat er 3 (3*70,5=211.5 graden), 4 (4*71.5=282 graden), en 5 (5*70,5=352,5 graden) simplexen rond een ribbe passen. 6 levert een hoekensom van 6*70,5=423 graden en is dus teveel. We hebben dus nog drie mogelijke regelmatige veelvlakken in de 4 dimensionale ruimte gevonden. Of ze dat ook echt zijn hebben we echter nog niet bewezen. Maar we weten nu in ieder geval dat er genoeg ruimte rondom een ribbe is om 3 verschillende regelmatige veelvlakken te maken.

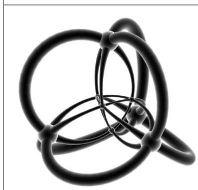
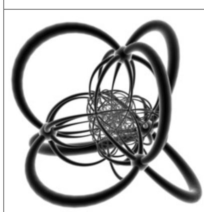
Door hetzelfde proces te gebruiken als hierboven, maar dan voor de octaëder, blijkt dat er maximaal drie octaëders passen rond een ribbe. Dit is dus het vijfde mogelijke regelmatige veelvlak dat we hebben gevonden voor de vierde dimensie.

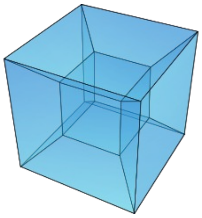
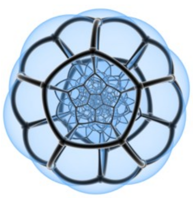
Maar nu dient zich iets heel wonderlijks aan: er is namelijk nog een regelmatig veelvlak! Deze is het makkelijkst te krijgen vanuit een veelvlak dat we eerder al hebben gevonden. Bij de simplexen bleek dat het mogelijk is om vijf simplexen rond een ribbe te leggen en zo een regelmatig veelvlak te krijgen. Dit veelvlak is de 600-cel, een figuur

opgebouwd uit 600 simplexen.
In dit veelvlak zitten er vijf simplexen rond een ribbe en er komen twaalf ribben samen in een hoekpunt. Dit betekent dat er 20 simplexen regelmatig om ieder hoekpunt liggen.

Als we deze simplexen nu veranderen in punten (meer over dit principe, dualiteit genaamd, volgt in het betreffende hoofdstuk) krijgen we een figuur met 20 hoekpunten op regelmatige afstanden: het twaalfvlak. Als we dit toepassen op alle simplexen van de 600-cel krijgen we een regelmatig veelvlak dat opgebouwd is uit 120 twaalfvlakken. Dit is het zesde regelmatige viervlak in de 4 dimensionale ruimte. Dit betekend dus dat er in de vierdimensionale ruimte meer regelmatige veelvlakken zijn dan in de driedimensionale ruimte!
Nu we de eigenschappen van de regelmatige veelvlakken hebben gevonden kunnen we het mooi samenvatten in *Tabel 4.2*. De plaatjes die wij hiervoor gebruikt hebben zijn slechts weergaven van deze figuren. Dit staat uitgebreider beschreven in een ander hoofdstuk.

Tabel 4.2: Regelmatige veelvlakken in de 4 dimensionale ruimte

Figuur	**Soort cellen**	**Cellen per ribbe**	**Naam**
	Simplex	3	Viersimplex
	Simplex	4	16-cel
	Simplex	5	600-cel

	Kubus	3	Hyperkubus
	Octaëder	3	24-cel
	Dodecaëder	3	120-cel

Het meest interessante van deze figuren is misschien wel de 24-cel. Om deze nader te onderzoeken proberen we deze stap voor stap te construeren, zodat de structuur ervan duidelijker wordt.

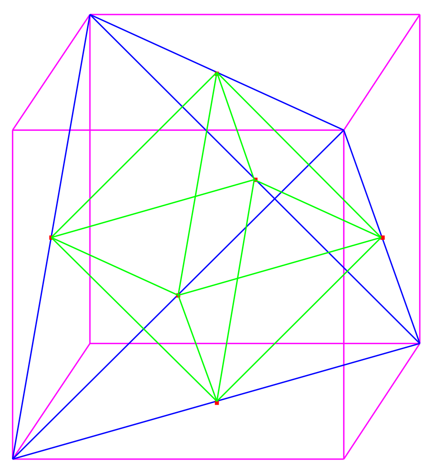
4.3. 24 cel

Constructie

Er zijn meerdere manieren om een 24 cel te maken. Wij hebben maar een manier gebruikt, en dat is de manier die wij hier zullen uitleggen.

1. Maak een goede tekening van de vierdimensionale hyperkubus.

2. In een gewone kubus ABCD.EFGH vormt ACFH een tetraëder. Dat zijn vier punten die onderling niet door een ribbe zijn verbonden. Zie *Figuur 4.5.*

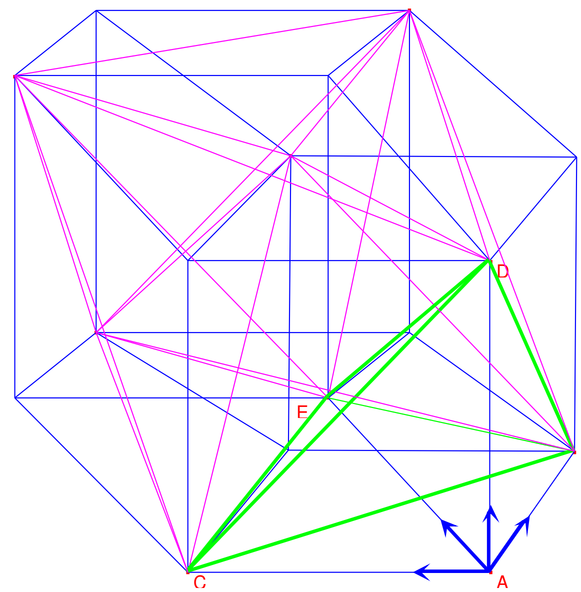


Figuur 4.5
Een kubus (roze) met daarin een tetraëder (blauw). De middens van de tetraëder vormen samen een octaëder (groen).

Er komen 6 8-vlakken bij elkaar in een punt:
6*24/24=6
6*24=144 = totaal aantal punten nodig, 24 is het aantal punten dat er is, elk punt wordt dus 144/24=6 keer gebruikt, dus 6 8-vlakken per punt

In de hyperkubus kun je in elke van de acht deelkubussen een dergelijke tetraëder ophangen. Je kunt het zo doen, dat je precies de helft van de punten kiest, vier punten per deelkubus dus. Het maakt niet uit welke punten je gebruikt, als de vier punten samen maar een tetraëder opleveren. Je gebruikt in totaal acht punten van de hyperkubus.

3. Om de niet benutte punten blijk je nu steeds vier punten te hebben gekozen. Die vormen ook een tetraëder. Zie *Figuur 4.6*.

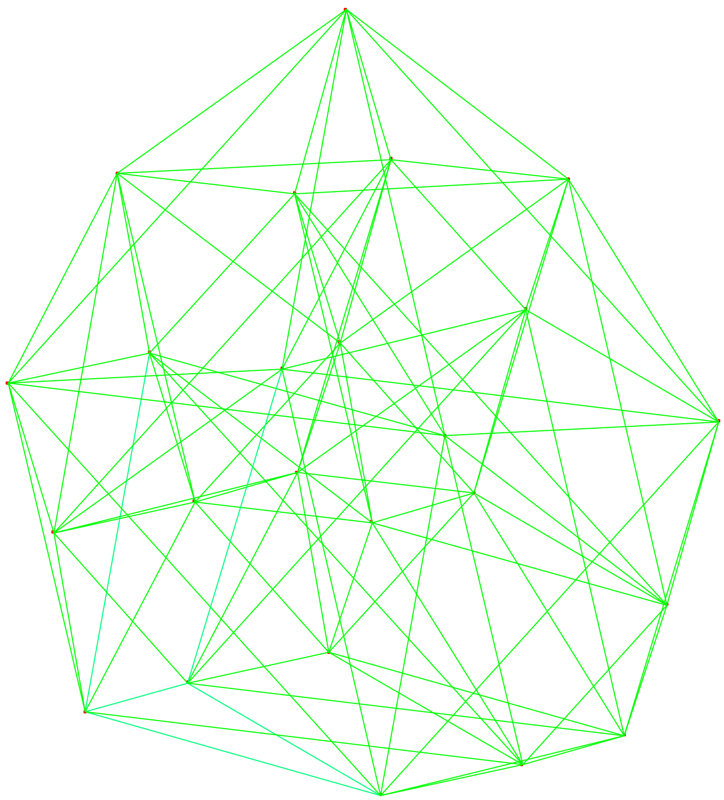


Figuur 4.6:
Om het niet benutte punt A liggen de punten B,C,D en E. Samen vormen deze een tetraëder (hier groen weergegeven). Al deze tetraëders vormen samen de 16 cel (hier de paarse figuur).

4. In totaal heb je nu 16 tetraëders gekozen. Die zitten met vlakken aan elkaar. Dit is de 16 cel.
Die heeft dus acht punten. Zie *Figuur 4.6*.

5. In een tetraëder vormen de middens van de ribben altijd een octaëder. Zie *Figuur 4.5.* In je 16 cel vind je dus zo al 16 octaëders. Als je de hoekpunten van de 16 cel bekijkt, zie je dat er zes ribben in een hoekpunt samenkomen. De zes punten die aan de ‘andere’ kant van de ribben liggen, vormen samen ook weer een octaëder. In totaal kunnen we dus nog acht octaëders vinden.

6. Met de 16 octaëders die we al hadden en de acht die we in de vorige stap hebben gevonden, hebben we dus 24 octaëders. Elke octaëder deelt twee vlakken met een andere octaëder. Samen vormen deze 24 octaëders de 24 cel. Deze 24 cel heeft dus 1 vierdimensionale cel, 24 cellen, 96 vlakken, 96 ribben en 24 punten. Hij is zelfduaal. Zie *Figuur 4.7.*



Figuur 4.7:
De 24-cel

4.4. 5 en meer dimensies

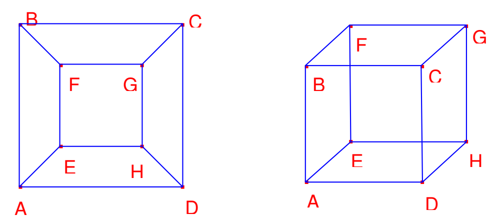
Als we naar ruimtes gaan kijken met 5 of meer dimensies, vinden we dat er telkens maar 3 regelmatige veelvlakken zijn. De eerste is het analoog van de simplex in hogere dimensies. Deze heeft n+1 hoekpunten waarbij n het aantal dimensies voorstelt. Het tweede regelmatige veelvlak is het analoog van de kubus. Deze heeft altijd 2^n hoekpunten. Het derde regelmatige veelvlak is altijd een veelvlak met 2^n hoekpunten en 2^n zijkanten van dimensie *n*, die bestaan uit simplexen van dimensie n-1. Dit is de analoog van het kruisfiguur (achtvlak in de derde dimensie). Hoe de constructie van deze drie reeksen van figuren verloopt wordt uitgebreid beschreven in hoofdstuk 6 over combinatoriek.
Eigenlijk wordt het dus alleen maar simpeler naarmate je dimensies toevoegt!

5. Weergaves

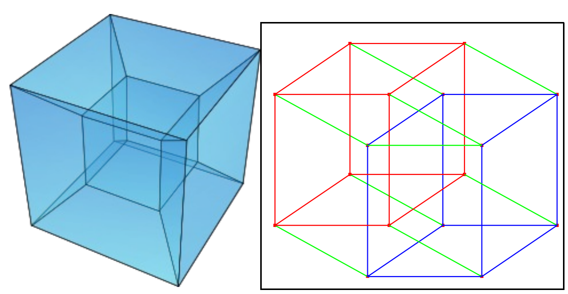
Het weergeven van meetkundige figuren van de eerste en tweede dimensie is niet zo moeilijk. Je tekent gewoon de juiste lijn, of de juiste veelhoek op een stuk papier. Maar het wordt al lastiger als je driedimensionale figuren wilt weergeven in het platte vlak. Bij ingewikkelde figuren kan je dit vermijden door het driedimensionale figuur te bouwen van bijvoorbeeld rietjes. Maar als je figuren uit nog hogere dimensies wilt weergeven, loop je tegen de grenzen van het menselijke voorstellingsvermogen op. Wij mensen kunnen geen vierde dimensie waarnemen, noch kunnen wij vierdimensionale modellen bouwen, dus je hebt het probleem dat je een vierdimensionaal figuur in een driedimensionale ruimte of een tweedimensionaal vlak zult moeten weergeven. In dit hoofdstuk zullen wij een aantal manieren waarop je een meetkundig figuur kunt weergeven behandelen. Wij zullen het hebben over: tekeningen, (driedimensionale) modellen, uitslagen, Schlegel diagrammen, Schläfli notaties, Cartesische coördinaten en hoekpunt figuren.

5.1 Tekenen

Een van de manieren om een figuur weer te geven is door er een tekening van te maken. Er zijn meerdere manieren om dit te doen. Zo kan je een kubus op bijvoorbeeld de twee manieren tekenen die je in *Figuur 5.1* ziet. De linker tekening is een zogenaamde perspectief weergave. Het ‘achterste’ vierkant is kleiner weergegeven dan het voorste. De rechter tekening is een zogenaamde parallelle projectie, hierbij zijn alle lijnen die parallel zijn in het ‘echt’ ook parallel aan elkaar getekend. Deze manier van weergeven kan je ook toepassen op vier dimensionale figuren, zoals de hyperkubus. In *Figuur 5.2* staat twee keer de hyperkubus afgebeeld. Ook hier staat links een perspectief weergave. De kleine kubus in het midden is de ‘achterste’ kubus van de acht waaruit de hyperkubus is opgebouwd, net zoals het middelste vierkant uit *Figuur 5.1* het ‘achterste’ vierkant van de kubus is. Rechts staat weer de parallelle projectie, waarbij alle ribben die parallel aan elkaar zijn ook parallel aan elkaar getekend zijn.



Figuur 5.1

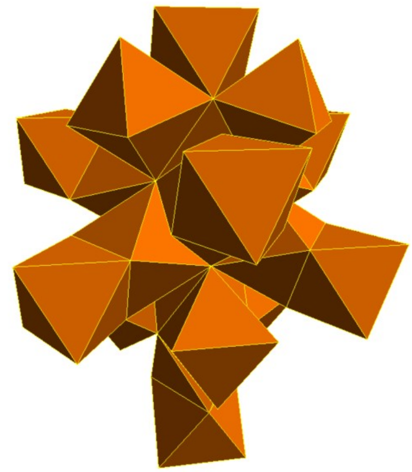


Figuur 5.2

5.2. (Driedimensionale) Modellen

Een van de beste manieren om een bepaald meetkundig figuur te tonen is door er een model van te maken. Het is

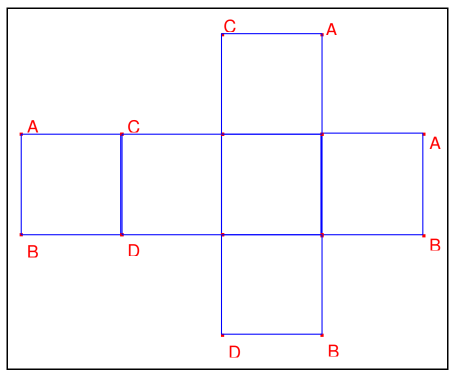
dan duidelijk hoe het figuur is opgebouwd, en welke verbindingen er in het figuur bestaan. Bovendien kan je een model vasthouden en ronddraaien, waardoor je het figuur ook vanuit andere hoeken kunt bekijken. Het probleem van meetkundige figuren uit hogere dimensies blijft echter dat we ze moeten 'vertalen' naar een figuur uit lagere dimensies. Hierdoor ziet het model er vaak anders uit dan de figuur die het moet voorstellen. Vlakken kunnen elkaar bijvoorbeeld snijden, terwijl ze dat in hogere dimensies niet doen. Toch zijn modellen een goed hulpmiddel om figuren uit hogere dimensies te begrijpen.
Modellen zijn vaak of een driedimensionale uitslag van een meetkundig figuur met meer dan drie dimensies, zie *Figuur 5.3*, of een drie dimensionaal Schlegel diagram, waarbij vooral de verbindingen tussen de verschillende punten van de figuur goed duidelijk wordt.



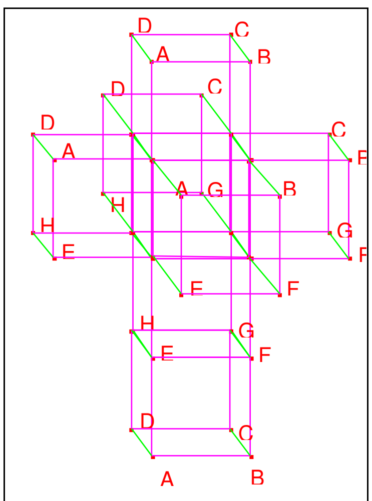
Figuur 5.3:
Een driedimensionale uitslag van de 24 cel.

5.3. Uitslag

Een van de manieren waarop je een meetkundig figuur kunt weergeven in een lagere dimensie, is door er een uitslag van te maken. Een uitslag is eigenlijk een bouwplaat van het figuur. Zo kan je een kubus weergeven met vier vierkanten die samen een rechthoek vormen, met aan weerszijden van de rechthoek nog een vierkant. Zie *Figuur 5.4*. In het algemeen geldt dat een uitslag van een *n*-dimensionale figuur dimensie *n-1* heeft.



Figuur 5.4:
Een van de elf mogelijke uitslagen van de kubus.



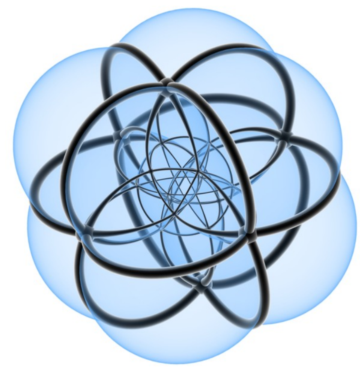
Figuur 5.5:
Een van de 261 mogelijke uitslagen van een vierdimensionale hyperkubus.

Door een uitslag te 'vouwen' door dimensie *n*, in het geval van de uitslag van de kubus de derde dimensie, ontstaat het oorspronkelijke figuur.
Een nadeel van deze weergave is dat het moeilijker is om je voor te stellen hoe het figuur er 'echt' uitziet en welke verbindingen er bestaan tussen de verschillende punten, maar het is wel heel duidelijk uit welke onderdelen het geheel is opgebouwd. Om duidelijk te maken welke punten naar elkaar gevouwen worden, wordt aan de hoeken van de uitslag vaak een letter toegekend. Gelijke letters betekent dat deze hoeken in het 'echte' figuur in een hoekpunt samenkomen.

Op dezelfde manier als je een uitslag van een kubus kan maken, is het ook mogelijk een uitslag van een vierdimensionale hyperkubus te bouwen. Dit is een driedimensionaal figuur, bestaande uit acht kubussen die in een soort driedimensionaal kruis aan elkaar vast zitten, zie *Figuur 5.5.*

5.4. Schlegel diagram

Zoals gezegd is het nadeel van een uitslag dat de verbindingen tussen de verschillende punten van een figuur niet zo duidelijk meer zijn. Een oplossing is het zogenaamde Schlegel diagram. In deze weergave blijven alle verbindingen tussen de verschillende punten duidelijk zichtbaar, hoewel het lastig kan zijn om te zien uit welke vlakken of cellen de figuur is opgebouwd. Zie *Figuur 5.6*. In het algemeen geldt dat je een *n*-dimensionaal figuur weergeeft in dimensie *n-1*. Soms lopen de lijnen in een Schlegel diagram krom. Dit komt omdat, voor de duidelijkheid, eerst de ribben van een *n*- dimensionale figuur worden geprojecteerd op de bijbehorende *n*-dimensionale bol. (Een driedimensionale bol is eigenlijke een cirkel die om een van zijn assen – en dus door de derde dimensie – wordt gedraaid. Een vierdimensionale bol ontstaat door een driedimensionale bol door de vierde dimensie te draaien. Deze reeks kan zo worden voortgezet. Deze bollen zijn echter nauwelijks weer te geven.)

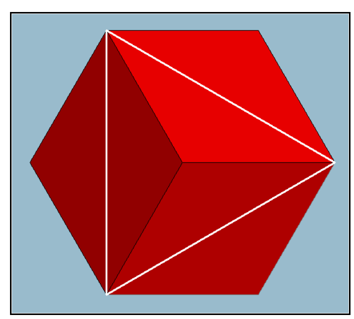


Figuur 5.6:
Schlegel diagram van de 24 cel.

Een nadeel van Schlegel diagrammen is dat ze vaak getekend worden, en dan dus tweedimensionaal zijn. Uitgaande van een vierdimensionaal figuur, krijg je dus een tweedimensionale weergave van een driedimensionaal Schlegel diagram. Om een beter overzicht te krijgen zou je eigenlijk een driedimensionaal model moet bouwen van het Schlegel diagram.

5.5. Hoekpunt figuur

Een wat vreemdere manier om een regelmatig figuur te beschrijven is door te vertellen wat het hoekpunt figuur is. Het hoekpunt figuur geeft de structuur weer van wat er in een hoek samenkomt. Een hoekpuntfiguur construeer je als volgt: Kies een punt. Leg op elke ribbe die van dat punt uitgaat op gelijke afstand een punt, de afstand maakt niet uit, maar een halve ribbe lengte werkt het prettigst. Verbind nu deze punten zo dat er door elk vlak een ribbe loopt, door elke cel een vlak enzovoorts. Zie ook *Figuur 5.7*.



Figuur 5.7:
Een kubus met daarin het bijbehorende hoekpunt figuur, een gelijkzijdige driehoek.

Nu is het niet zo dat elk hoekpunt figuur alleen bij een soort figuur hoort. (Zie ook

Tabel 5.1) Zo zijn de hoekpunt figuren van een kubus en van een tetraëder allebei een driehoek. Om toch duidelijk te maken om welk figuur het gaat wordt het hoekpunt figuur weer beschreven met een aantal cijfers. Voor een kubus is dat bijvoorbeeld 4.4.4 Het aantal cijfers geeft hierbij aan hoeveel vlakken er in het hoekpunt samenkomen (in dit geval dus drie). Het cijfer zelf geeft aan om wat voor vlakken het gaat. Een drie staat voor een driehoek, een vier voor een vierkant, een vijf voor een vijfhoek, enzovoorts.

Tabel 5.1

Drie dimensionale figuren:	**Bijbehorende hoekpunt figuren:**
Tetraëder	Gelijkzijdige driehoek
Kubus	Gelijkzijdige driehoek
Octaëder	Vierkant
Dodecaëder	Gelijkzijdige driehoek
Icosaëder	Regelmatige vijfhoek
Vier dimensionale figuren:	
Simplex	Tetraëder
Hyperkubus	Tetraëder
16 cel	Octaëder
24 cel	Kubus

5.6. Schläfli notatie

De meeste weergaves van meerdimensionale figuren zijn gebaseerd op afbeeldingen van die figuren, al dan niet in een lagere dimensie. De Schläfli notatie maakt geen gebruik van afbeeldingen, maar beschrijft een meerdimensionale figuur met behulp van getallen. Om een figuur van dimensie *n* te beschrijven zijn er *n*-1 getallen nodig.

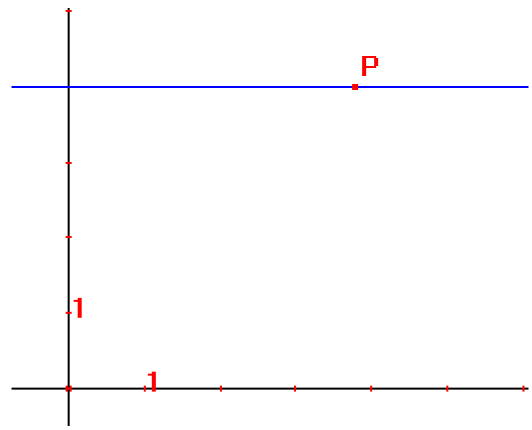
Voor regelmatige veelhoeken wordt dit genoteerd als {p}, waarbij p het aantal zijden is. Een zeshoek (zes zijden) is dus {6}.
Voor regelmatige veelvlakken is een extra getal nodig, zodat de Schläfli notatie wordt uitgebreid tot {p,q}. Hierbij beschrijft p de vorm van de (regelmatige) vlakken en q beschrijft het aantal van deze vlakken dat in een hoekpunt samenkomt. De vlakken van de kubus is opgebouwd uit vierkanten, genoteerd als {4} en er komen in elke hoekpunt drie van deze vierkanten samen. De notatie van een kubus is dus {4,3}.
Als het aantal dimensies wordt uitgebreid, geldt dat voor elke extra dimensie een extra getal nodig is om de figuur

te beschrijven. In de vierde dimensie geeft et laatste getal aan hoeveel driedimensionale objecten er samen komen rond een ribbe. En in de vijfde dimensie geeft het laatste getal aan hoeveel vierdimensionale objecten samenkomen rond een cel. Bijvoorbeeld: Een hyperkubus is opgebouwd uit kubussen, {4,3}. In elke ribbe komen drie kubussen samen, zodat het Schläfli symbool van de hyperkubus {4,3,3} wordt.

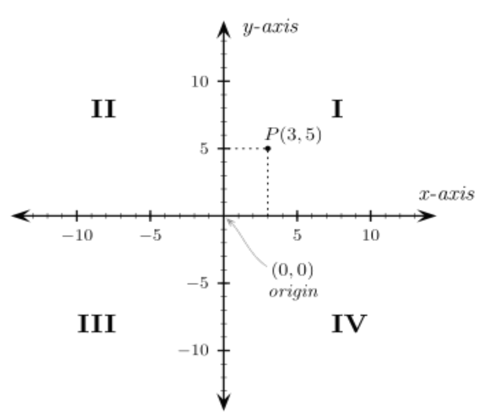
Tot nog toe hebben we alleen regelmatige figuren beschreven met behulp van de Schläfli notatie. Het is echter ook mogelijk om niet regelmatige figuren hiermee te beschrijven. Afhankelijk van het soort figuur dat beschreven wordt, staan de getallen dan boven elkaar, of wordt de notatie voorafgegaan door een letter. Omdat wij alleen regelmatige figuren bestuderen zullen we hier niet verder op in gaan.

5.7. Cartesische coördinaten

De Schläfli notatie beschrijft de structuur van meetkundige figuren. Het is echter ook mogelijk om met behulp van getallen de hoekpunten van een figuur aan te geven. Hierbij wordt gebruik gemaakt van zogenaamde Cartesische coördinaten. Bij het Cartesisch coördinatenstelsel wordt gebruik gemaakt van haaks op elkaar staande assen, voor elke dimensie een, die elkaar in een punt snijden, de oorsprong. Op de assen is een schaalverdeling aangebracht. Zie *Figuur 5.8*. Een punt wordt nu beschreven door de eerst de bijbehorende waarde van de x-as te noemen, vervolgens de waarde van de y-as enzovoorts. Punt P uit figuur 12 heeft dus als coördinaten (3,5). Als je een figuur met meer dimensies wilt beschrijven, voeg je extra assen toe, totdat je er net zoveel hebt als het aantal dimensies dat je figuur rijk is. Je moet hierbij er wel opletten dat alle assen door de oorsprong gaan, en dat ze haaks op elkaar staan.



Figuur 5.8:
Een Cartesisch assenstelsel voor twee dimensies.



Een tweedimensionaal Cartesisch assenstelsel met een lijn met daarop punt P.

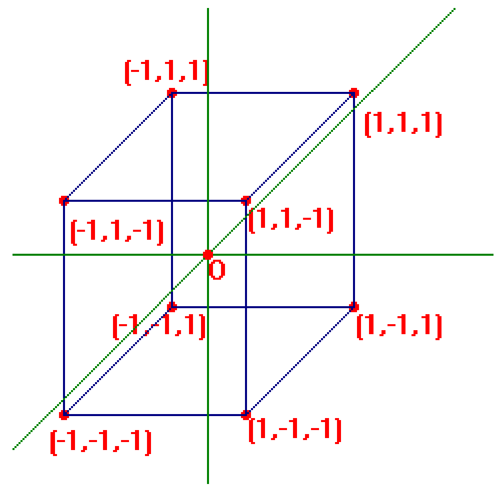
Het grote voordeel van Cartesische coördinaten is dat geometrische figuren met behulp van coördinaatgetallen beschreven kunnen worden. Het is nu mogelijk om vergelijkingen op te stellen voor lijnen, vlakken en hypervlakken. Een hypervlak is een driedimensionale doorsnede van een vierdimensionale ruimte. Dit is analoog aan een 'gewoon' vlak, dat een tweedimensionale doorsnede van een driedimensionale ruimte is.

De vergelijking van een lijn, een vlak en een hypervlak zijn als volgt:

1. *ax + by = c* (lijn in 2D ruimte)
2. *ax + by + cz = d* (vlak in 3D ruimte)
3. *ax + by + cz + dt = e* (hypervlak in 4D ruimte)

Om een (willekeurig) punt te vinden op een lijn, vlak of hypervlak, moet je een van de variabelen vastleggen. Voor de lijn is dat dus *x* of *y*; voor het vlak *x*, of *y*, of *z*; voor het hypervlak *x*, of *y*, of *z,* of *t.* Als voorbeeld nemen we de lijn. Zie ook *Figuur 5.9*. Om een willekeurig punt op de getekende lijn te kunnen leggen is het alleen nodig om de *y* coördinaat van deze lijn te kennen. De *x* coördinaat maakt niet uit, omdat de lijn oneindig lang is. Het plaatsen van punten in vlakken en hypervlakken gebeurd op dezelfde manier.

Het is vaak mogelijk om, bij regelmatige figuren, de hoekpunten in een keer te beschrijven met een Cartesische coördinaat. Voor een kubus met ribbes van lengte 2, en een middelpunt op de oorsprong van het coördinaten stelsel, kunnen de hoekpunten als volgt worden beschreven: (±1,±1,±1). Er zijn drie coördinaten nodig, omdat het hier om een driedimensionaal figuur gaat. Zie ook *Figuur 13*. In het groen zijn hier de drie assen aangegeven, in het rood de coördinaten van de verschillende punten van de kubus.



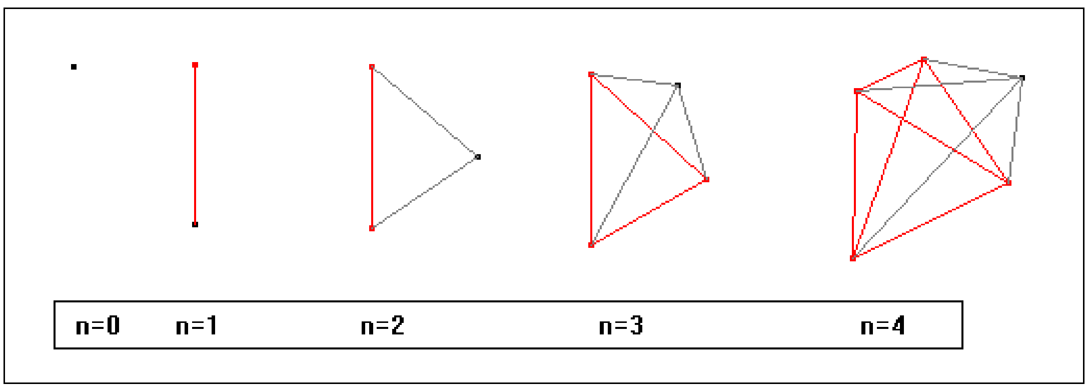
Figuur 5.9:
Een Cartesisch coördinatenstelsel voor drie dimensies. De acht coördinaten vormen samen een kubus.

6. Combinatoriek

6.1. Simplex-reeks

Constructie

De nulde dimensie is een punt. Als je nu een punt buiten de nulde dimensie plaatst, kun je beide punten verbinden met een lijn. Dit is de eerste dimensie. Plaats je nu een punt buiten de eerste dimensie, en je verbindt dit punt met de vorige twee, dan krijg je een vlak dat wordt bepaald door drie punten, de driehoek. Als je nu een punt buiten het vlak plaatst, en dit punt verbindt met de vorige drie, krijg je een ruimtelijk figuur, de tetraëder. Deze reeks figuren kan je voortzetten naar hogere dimensies. Deze reeks wordt de simplex-reeks genoemd. We gebruiken het woord simplex omdat dit de eenvoudigste reeks is die je kunt maken. 'Simplex' komt uit het Latijn en betekent 'eenvoudig'. De eerste vier simplexen zijn weergegeven in *Figuur 6.3*. De rode delen zijn de deelobjecten die je al had, de grijze zijn de deelobjecten die gevormd worden door de reeks door te trekken naar een hogere dimensie.



Figuur 6.1

Tellen van de deelobjecten

Van de figuren die zo ontstaan, kan je de verschillende deelobjecten (de punten, lijnen, vlakken etc.) tellen. We hebben dit gedaan en de resultaten hiervan zijn weergegeven in *Tabel 6.1.*

Tabel 6.1

Simplex-reeks								
Dimensie	**Punten**	**Ribben**	**Vlakken**	**Cellen**	**4D cellen**	**5D cellen**	**6D cellen**	**7D cellen**
0	1							
1	2	1						
2	3	3	1					
3	4	6	4	1				
4	5	10	10	5	1			
5	6	15	20	15	6	1		
6	7	21	35	35	21	7	1	
7	8	28	56	70	56	28	8	1

Wat op valt in deze tabel is de regelmaat. Het aantal punten neemt steeds met één toe. Het aantal ribben neemt elke keer toe met een getal gelijk aan het aantal punten dat je had. Dit is begrijpelijk, want als je de volgende simplex van de reeks construeert, ga je uit van de simplex die je had. Vervolgens plaats je een nieuw punt in een hogere dimensie, en je verbindt dit punt met alle punten die je al had. Elk bestaand punt levert dus een extra ribbe op. Iets soortgelijks gebeurt er bij de vorming van extra vlakken, cellen,

4D-cellen etc. Bij de vorming van een simplex uit de simplex van een dimensie lager, levert elke ribbe één extra vlak op, elk vlak één extra cel, elke cel één extra 4D-cel etc. Het totale aantal krijg je door al deze extra objecten op te tellen bij de objecten van dat soort die al aanwezig waren in de figuur. In de tabel komt dit neer op het volgende: Om bijvoorbeeld het aantal ribben van een simplex in de vijfde dimensie te weten te komen, tel je het aantal ribben van de vier dimensionale simplex op bij het aantal punten dat een vier dimensionale simplex heeft. Zie *Tabel 6.2*.

Tabel 6.2

Dimensie	**Punten**	**Ribben**	**Vlakken**	**Cellen**	**4D cellen**	**5D cellen**
4	5	10	10	5	1	
		+	+			
5	6	15	20	15	6	1

De driehoek van Pascal en combinatoriek

Iets anders wat op valt in *Tabel 6.1* is de overeenkomst van deze getallen met de driehoek van Pascal. De driehoek van Pascal is een rangschikking van de uitkomsten van de binomiaalcoëfficiënten $\binom{n}{k}$ in verschillende rijen, beginnende met *n*=0, daarna *n*=1, *n*=2 etc. Hieronder is een stukje van de driehoek (van *n*=0 tot *n*=6) weergegeven:

```
                  1
               1     1
            1     2     1
         1     3     3     1
      1     4     6     4     1
   1     5    10    10     5     1
1     6    15    20    15     6     1
```

Een van de bijzondere eigenschappen van de driehoek van Pascal is dat elk getal de som is van de twee getallen boven hem.

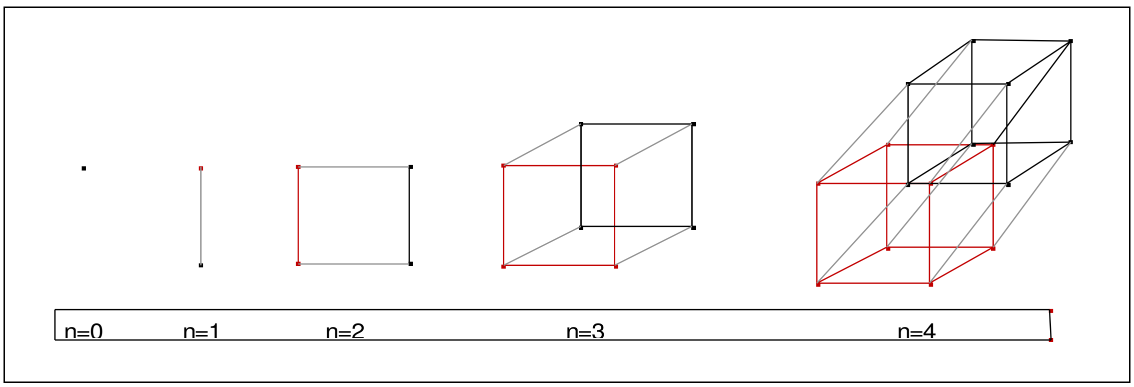
Hetzelfde geldt ook voor de getallen in *Tabel 6.2*, zoals wij hierboven hebben aangetoond. De getallen in *Tabel 3* verschillen op één punt van de driehoek van Pascal. In de tabel komen *n*=0 en *k*=0 uit de driehoek van Pascal niet voor. Wat *n*=1 was in de driehoek wordt *n*=0 in *Tabel 6.1*. Hetzelfde geldt voor *k*=0 en *k*=1. Het gevolg hiervan is dat het aantal deelobjecten *k* in een simplex van dimensie *n* te berekenen is met de combinatie $S_{n,k}\binom{n+1}{k+1}$.

Een andere manier om deze formule te vinden is door uit te gaan van de verschillende deelobjecten. In *Tabel 3* is te zien dat het aantal punten in dimensie *n* gelijk is aan *n*+1. Omdat een ribbe altijd bepaald wordt door twee punten, is het aantal ribben in een simplex gelijk aan het aantal mogelijke combinaties van twee punten uit het totale aantal punten. Dit kan worden weergegeven met de volgende combinatie $\binom{n+1}{2}$. Een vlak wordt bepaald door drie punten. Hier hoort dus de combinatie $\binom{n+1}{3}$ bij. Op dezelfde manier kun je combinaties opstellen voor alle deelobjecten in de simplex-reeks. Je kunt al deze deelformules echter ook samenvoegen tot één formule, die het aantal deelobjecten van deeldimensie *k* in een simplex van dimensie *n* weergeeft. Deze formule is hetzelfde als de formule die we hadden gekregen door uit te gaan van de overeenkomst met de driehoek van Pascal, namelijk $S_{n,k} = \binom{n+1}{k+1}$. (Coxeter, 1963)

6.2. Kubus-reeks

Constructie

Behalve de hierboven behandelde simplex-reeks, zijn er ook nog andere reeksen. De kubus-reeks ontstaat als volgt: De nulde dimensie is een punt. Verplaats dit punt naar de eerste dimensie, er ontstaat een lijn. Verplaats nu deze lijn parallel aan zichzelf naar de tweede dimensie, er ontstaat een vlak. Verplaats nu dit vlak parallel aan zichzelf naar de derde dimensie, er ontstaat een kubus. Als je nu deze kubus parallel aan zichzelf verplaatst naar de vierde dimensie krijg je een hyperkubus. Deze reeks kan je oneindig lang doorzetten. Al deze figuren samen vormen de kubus-reeks. De eerste vijf figuren uit deze reeks zijn weergegeven in *Figuur 6.2*. In dit figuur zijn de roodgetekende deelobjecten de objecten die je al had, net als bij de simplex-reeks. De zwarte deelobjecten zijn de objecten die ontstaan door het object dat je had te verplaatsen naar een hogere dimensie. Hierbij worden de grijze deelobjecten gevormd.



Figuur 6.2

Tellen van de deelobjecten

Van de figuren die zo ontstaan, kan je de verschillende deelobjecten (de punten, lijnen, vlakken etc.) tellen. We hebben dit gedaan en de resultaten hiervan zijn weergegeven in *Tabel 6.3.*

Tabel 6.3

Kubus-reeks								
Dimensie	**Punten**	**Ribben**	**Vlakken**	**Cellen**	**4D cellen**	**5D cellen**	**6D cellen**	**7D cellen**
0	1							
1	2	1						
2	4	4	1					
3	8	12	6	1				
4	16	32	24	8	1			
5	32	80	80	40	10	1		
6	64	192	240	160	60	12	1	
7	128	448	672	560	280	84	14	1

Ook in deze tabel valt weer een regelmaat op, net als bij de simplex-reeks. Het aantal punten verdubbeld steeds en ook bij de toename van de andere deelobjecten is een bepaalde regelmaat te ontdekken. Zoals bij de simplex-reeks elk getal berekend kon worden door de som te nemen van het getal dat erboven lag en het getal dat er linksboven lag, zo kan je hier een getal bereken door twee keer het getal erboven te nemen en een keer het getal linksboven, zie *Tabel 6.4*.

Tabel 6.4

Dimensie	**Punten**	**Ribben**	**Vlakken**	**Cellen**	**4D cellen**	**5D cellen**
4	**16**	**32**	**24**	**8**	**1**	
	+	+				
5	**32**	**80**	**80**	**40**	**10**	**1**

De driehoek van Pascal en combinatoriek

Wij vermoedden dat ook de kubus-reeks overeen zou komen met een bepaalde vorm van de driehoek van Pascal. Zoals gezegd, is een driehoek van Pascal de rangschikking van de uitkomsten van de binomiaalcoëfficiënten van $\binom{n}{k}$, met als bijzondere eigenschap dat elk getal kan worden verkregen door de som van de twee getallen erboven te nemen. In de kubus-reeks is iets soortgelijks mogelijk. Alleen moet je hier de som van twee keer het

getal boven en een keer het getal linksboven het gewenste getal nemen.
De binomiaalcoëfficiënten komen eigenlijk uit het Binomium van Newton. Het Binomium van Newton wordt gebruikt om de haakjes weg te werken uit berekeningen als $(a+b)^n$. Het Binomium van Newton ziet er in de verkorte versie zo uit: $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$.
Wat wij nu proberen is een functie te vinden in de vorm van $(a+bx)^n$, dat bij ontwikkeling met behulp van het Binomium van Newton coëfficiënten geeft die overeenkomen met het aantal deelobjecten van de kubus-reeks. Bij de simplex-reeks hebben wij alleen gebruik gemaakt van de term $\binom{n}{k}$, omdat de simplex-reeks overeenkomt met de driehoek van Pascal en de driehoek van Pascal op deze combinatie is gebaseerd. Zoals al eerder is gezegd krijg je in de driehoek van Pascal een getal door de som te nemen van de getallen die een rij hoger boven het gewenste getal staan; of, als we naar *Tabel 6.2* kijken, een keer het getal linksboven en een keer het getal boven het gewenste getal.. Willen we dit weergeven met een formule in de vorm van $(a+bx)^n$, dan is deze formule $(1+x)^n$. De *n* staat hier voor de dimensie van het figuur. De ontwikkeling van deze formule met behulp van het Binomium van Newton levert dan de juiste coëfficiënten op.

In het geval van de kubus-reeks geldt echter dat je twee keer het getal boven en een keer het getal linksboven het getal moet optellen om het getal te krijgen dat je graag wil hebben. Willen we dit weergeven in een formule als $(a+bx)^n$, dan blijkt dat deze formule $(2x + 1)^n$ wordt. De 2 betekent dat je twee keer het getal linksboven het gewenste getal moet nemen.
Als je $(2x+1)^n$ ontwikkelt met behulp van het Binomium van Newton, krijg je de volgende uitwerking:

$$(2x+1)^n = \binom{n}{0}\cdot 2^n \cdot x^n + \binom{n}{1}\cdot 2^{n-1}\cdot x^{n-1} + \ldots + \binom{n}{k}\cdot 2^{n-k}\cdot x^{n-k} + \ldots + \binom{n}{n}\cdot 2^{n-n}\cdot x^{n-n}$$

Omdat wij alleen geïnteresseerd zijn in de coëfficiënten uit deze somreeks en niet in de waardes van x zelf, laten we de factor x^{n-k} weg. Het aantal deelobjecten *k* in dimensie *n* wordt dus bepaald door $\binom{n}{k}\cdot 2^{n-k}$. De directe formule voor het aantal deelobjecten k in dimensie *n* wordt dan $H_{n,k} = \binom{n}{k}\cdot 2^{n-k}$

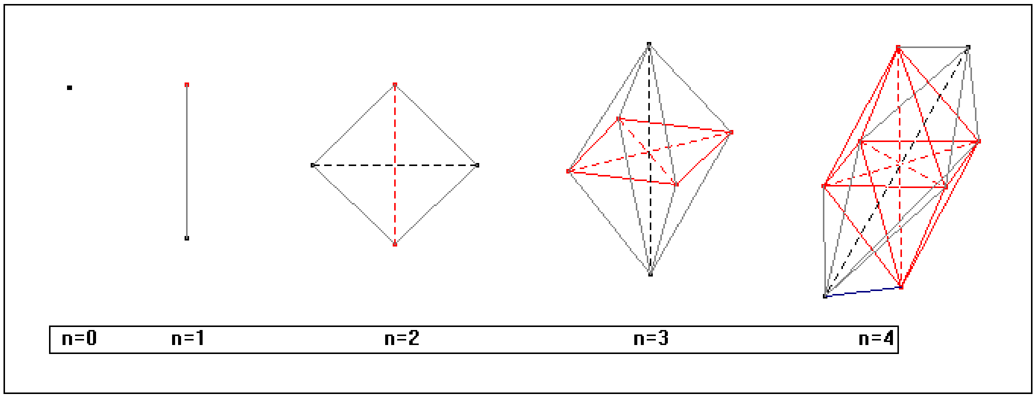
Een ander bewijs voor deze formule kan je vinden door uit te gaan van het aantal deelobjecten dat in een hoek van een kubus samenkomt. Laten we een vierdimensionale hyperkubus nemen. Dan komen er in elke hoek vier ribben samen. Deze vier ribben vormen samen 6 vlakken, namelijk $\binom{4}{2}$. Een hyperkubus heeft 16 punten. Dit levert 16x6=96 vlakken op. Alleen heb je nu elk vlak vier keer geteld, namelijk vanuit elk hoekpunt één keer. Dit levert dus een totaal van $\frac{96}{4}$ = 24 vlakken.

Dit kunnen we nu vereenvoudigen tot een formule die voor alle gevallen geldt. Bij elk hoekpunt steken er *n* ribben uit en *k* van deze ribben vormen het deelobject *k*. Daarom is het aantal deelobjecten *k* bij een hoekpunt van een *n* dimensionale kubus gelijk aan $\binom{n}{k}$. Omdat het aantal hoekpunten gelijk is aan 2^n (zie *Tabel 5*) krijgen we een totaal aantal van $2^n\binom{n}{k}$ deelobjecten *k*. We moeten nu alleen nog corrigeren voor het dubbel tellen van de deelobjecten. We hebben het aantal deelobjecten *k* in totaal 2^k keer te vaak geteld. We moeten ons totaal dus delen door 2^k, waardoor dit onze algemene formule wordt: $H_{n,k} = 2^{n-k}\binom{n}{k}$. (Banchoff, 1996)

6.3. Kruisfiguren-reeks

Constructie

De constructie van de kruisfiguren begint eigenlijk in de eerste dimensie. In de eerste dimensie is er maar één as die de richting aangeeft. Er bestaat alleen een x-as zogezegd. Leg nu op deze as twee punten en verbindt die met elkaar, je hebt een lijn. Ga je nu naar de tweede dimensie, dan kun je nog een as trekken die haaks op de eerste staat, de y-as. Leg hier ook twee punten op en verbindt deze met de punten die je al had. Je krijgt een vierkant. Voor de derde dimensie trek je de z-as, haaks op beide vorige assen en legt hier twee punten op die je verbindt met de vier punten die je al had. Je krijgt een octaëder. Ook deze reeks is eindeloos voort te zetten, door voor elke volgende dimensie een extra as te trekken die haaks staat op de alle vorige assen. Leg hier dan twee punten op en verbindt deze punten met de punten die je al had. De figuren die je hiermee krijgt worden kruisfiguren genoemd. De eerste vier kruisfiguren zijn getekend in *Figuur 6.3*. Net als in *Figuur 6.1* en *Figuur 6.2* zijn de rode deelobjecten de objecten die je al had. De zwarte zijn de punten die je in de nieuwe dimensie plaatst, waardoor de grijze ribben gevormd worden. De onderbroken lijnen geven de assen weer.



Figuur 6.3

Tellen van de deelobjecten

Van de figuren die in de kruisfiguren-reeks ontstaan, kan je de verschillende deelobjecten (de punten, lijnen, vlakken etc.) tellen. We hebben dit gedaan en de resultaten hiervan zijn weergegeven in *Tabel 6.5*.

Tabel 6.5

Kruisfigurenreeks								
Dimensie	**Punten**	**Ribben**	**Vlakken**	**Cellen**	**4D cellen**	**5D cellen**	**6D cellen**	**7D cellen**
0	1							
1	2	1						
2	4	4	1					
3	6	12	8	1				
4	8	24	32	16	1			
5	10	40	80	80	32	1		
6	12	60	160	240	192	64	1	
7	14	84	280	560	672	448	128	1

Deze tabel vertoont opvallend veel overeenkomsten met *Tabel 6.3*. De getallen zijn gelijk, alleen staan ze hier in een andere volgorde. In *Tabel 6.6* is dit duidelijk zichtbaar voor de drie en vier dimensionale figuren uit de kruisfiguren-reeks en de kubus-reeks. Over de gevolgen van deze verwisseling komen we terug in het hoofdstuk dualiteit.

Tabel 6.6

Kruisfiguren-reeks					
Dimensie	**Punten**	**Ribben**	**Vlakken**	**Cellen**	**4D cellen**
3	6	12	8	1	
4	8	24	32	16	1
Kubus-reeks					
Dimensie	**Punten**	**Ribben**	**Vlakken**	**Cellen**	**4D cellen**
3	8	12	6	1	
4	16	32	24	8	1

Ook in *Tabel 6.5* valt weer een regelmaat op, net als bij de simplex-reeks en de kubus-reeks. Het aantal punten neemt steeds met twee toe en ook bij de toename van de andere deelobjecten is een bepaalde regelmaat te ontdekken. Zoals bij de kubus-reeks elk getal berekend kon worden door de som te nemen van twee keer het getal dat erboven lag en een keer het getal dat er linksboven lag, zo kan je hier een getal bereken door een keer het getal erboven te nemen en twee keer het getal linksboven, zie *Tabel 6.7*.

Tabel 6.7

Dimensie	**Punten**	**Ribben**	**Vlakken**	**Cellen**	**4D cellen**	**5D cellen**
4	**8**	**24**	**32**	**16**	**1**	
		+	+			
5	**10**	**40**	**80**	**80**	**32**	**1**

De driehoek van Pascal en combinatoriek

Behalve door te tellen is het ook mogelijk om een directe formule op te stellen – net als voor de simplex-reeks en de kubus-reeks – om het aantal deelobjecten *k* in dimensie *n* te weten te komen.
We zullen proberen een directe formule te vinden door uit te gaan van de driehoek van Pascal en het Binomium van Newton. Deze methode hebben we al een keer toegepast bij de kubus-reeks. Om een bepaald getal te krijgen moet je een keer het getal boven en twee keer het getal linksboven het gewenste getal optellen. In een formule als

$(a+bx)^n$ wordt dit: $(x + 2)^n$ (zie ook 'De driehoek van Pascal en combinatoriek' bij de paragraaf over de kubus-reeks) Als we dit ontwikkelen met behulp van het Binomium van Newton krijg je het volgende: $K_{n,k} = \binom{n}{k} 2^k$,

waarbij $K_{n,k}$ het aantal deelobjecten van dimensie *k* in dimensie *n* is.

De waarde voor *k=0* die je nu steeds krijgt is 1, want $\binom{n}{0} 2^0 = 1$. Deze *k=0* waarde komt in de tabel van de kruisfiguren-reeks niet voor. Onze tabel begint eigenlijk bij *k=1*, en omdat wij *k=1* gelijk stellen aan *k=0,* moeten wij voor elke *k*, *k+1* nemen. (Dit is dezelfde methode die we hebben gebruikt bij de simplex-reeks, zie bladzijde 24)

Hierdoor wordt de definitieve formule $K_{n,k} = \binom{n}{k+1} 2^{k+1}$.

6.4. Som van de objecten

Kubus-reeks

Als we goed naar de *Tabel 6.3* (Kubus-reeks) kijken, valt op dat de som van de kolommen voor iedere rij steeds drie keer zo groot worden. Dit is verder uitgewerkt in *Tabel 6.8*.

Tabel 6.8: Som van een rij objecten

Dimensie	**Punten**	**Ribben**	**Vlakken**	**Cellen**	**4D cellen**	**Som rij**
0	1	0	0	0	0	1
1	2	1	0	0	0	3
2	4	4	1	0	0	9
3	8	12	6	1	0	27
4	16	32	24	8	1	81

Een verklaring hiervoor is op verschillende manieren te vinden. De duidelijkste verklaring is te vinden door te kijken naar de wijze waarop de getallen gevormd worden. Om een willekeurig getal in de reeks te vinden neem je twee maal het getal wat er boven staat in de figuur plus het getal dat er links boven staat. In formulevorm: $N_{n,k} = 2N_{n-1,k} + N_{n-1,k-1}$ waarbij *n* het aantal dimensies van de volledige figuur is en *k* de dimensies van het deelobject waar je naar kijkt. In een tabel kun wordt dit als volgt gevisualiseerd:

Tabel 6.9

Dimensie	Punten	Ribben	Vlakken	Cellen	4D cellen
0	1	0	0	0	0
1	2	1	0	0	0
2	4	4	1	0	0
3	8	12	6	1	0

In de tabel is duidelijk te zien dat er vanuit ieder getal in een kolom drie pijlen naar de volgende kolom gaan. Ieder getal in een kolom wordt dus drie keer gebruikt in de volgende kolom. Oftewel: de som van rij n is drie keer zo groot als de som van rij $n-1$. Rij n=0 heeft een som van 1. Hieruit volgt dat de som van iedere willekeurige rij berekend kan worden met de formule: 3^n.

Samengevat:

Stelling 6.1

Voor de som van de objecten van figuren in de kubusreeks geldt:

$$\sum_{k=0}^{n} N_{n,k} = 3^n$$

Het hierboven staande voorbeeld laat wel zien hoe het werkt, maar een volledig bewijs is het nog niet. Een goed bewijs kunnen we wel geven door gebruik te maken van volledige inductie. Dit houdt in dat we eerst bewijzen dat de stelling klopt voor iedere stap. Volgens bewijzen we het eerste geval in de rij. Dit kun je je voorstellen als een rij dominostenen: eerst zorgen we ervoor dat het vallen van de stenen werkt, en volgens gooien we de rij om door alleen het eerste steentje om te duwen:

Het begin

Het eerste ‘steentje’ in onze rij dominostenen is n=1. Uit de tabel zien we direct dat dit 3 is.

De stap

Dan nu de stap. Wat we hebben gezien in de *Tabel 6.9*, is dat een getal wordt gevormd door twee keer het getal erboven en een keer het getal er linksboven. In formulevorm:

$N_{n,k} = N_{n-1,\,k-1} + 2*N_{n-1,k}$

Om de hele rij $\sum_{k=0}^{n} N_{n,k}$ te krijgen moeten we dus $N_{n,k}$ voor iedere waarde van *k* bij elkaar optellen. Laten we kijken hoe dit eruit zien een vaste *k*. Stel we tellen *k* en *k+1* op. Dan krijgen we:

$N_{n,k} = N_{n-1,k-1} + 2*N_{n-1,\,k} + N_{n-1,k} + 2*N_{n-1,\,k+1} = N_{n-1,k-1} + 3*N_{n-1,\,k} + 2*N_{n-1,k+1}$

Als je hier ook *k+2* bij opteld krijgen we:

$N_{n-1,k-1} + 3*N_{n-1,\,k} + 3*N_{n-1,k+1} + 2*N_{n-1,k+2}$

Als we deze rij verder uitbreiden krijgen we dus:

$N_{n-1,k-1} + 3*N_{n-1,\,k} + \ldots\ldots\ldots + 3*N_{n-1,k+(x-1)} + 2*N_{n-1,k+x}$

$N_{n-1,k-1}$ ligt echter buiten de tabel en is 0. Ook zijn de laatste termen 0 als je meer ver genoeg door gaat (zie *Tabel 6.3*). Wat er dus eigenlijk overblijft is:

$3*N_{n-1,\,k} + \ldots\ldots\ldots + 3*N_{n-1,k+(x-1)}$

Anders gezegd wordt iedere term uit rij *n-1* verdrievoudigd. Hiermee hebben we dus aangetoond dat de stap een vermenigvuldiging met 3 is:

$$\sum_{k=0}^{n} N_{n,k} = \sum_{k=0}^{n} 3*N_{n+1,k}$$

Samenvoegen

Eerst nemen we *n*=2:

$$\sum_{k=0}^{n} N_{2,k} = \sum_{k=0}^{n} 3*N_{1,k} = 3*\sum_{k=0}^{n} N_{1,k} = 3*3 = 3^2$$

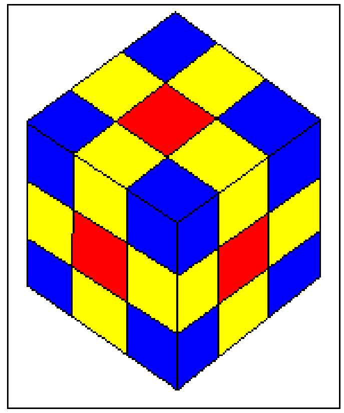
Dus:

$$\sum_{k=0}^{n} N_{n,k} = 3^n$$

En zo is de stelling via volledige inductie bewezen.

Een ander, meer visueel, bewijs is het volgende (Banchoff, 1996): stel we nemen een kubus welke we in alle dimensies in drieën verdelen. We krijgen dan $3^n = 3^3 = 27$ kleine kubussen. Het onderstaande plaatje maakt de situatie in een oogopslag duidelijk:

Zoals in de figuur te zien is correspondeert ieder hoekpunt uit de oorspronkelijke kubus met een kleine kubus (blauwe kubussen in *Figuur 6.4*). Ook iedere ribbe correspondeert met een kleine kubus (gele kubussen), en ieder vlak correspondeert met een klein kubus (rode kubussen). Vervolgens blijft de kleine kubus in het midden nog over, deze correspondeert met de kubus zelf. Wat we nu dus zien is dat elke kleine kubus correspondeert met een object in de kubus, namelijk met een punt, lijn (ribbe), vlak en kubus. Het totaal van de kleine kubussen correspondeert dus ook met de som van de objecten in de kubus.
Het totaal aan kleine kubussen kregen we door 3^n te nemen. 3^n is dus ook de som van de objecten in de kubus. Dit antwoord komt overeen met *Stelling 6.1*.



Figuur 6.4

Kruisfiguren-reeks

Als we nu kijken naar de kruisfiguren-reeks zien we grote overeenkomsten met de kubussenreeks:

Tabel 6.10

Dimensie	Punten	Ribben	Vlakken	Cellen	4D cellen	Som rij
0	1	0	0	0	0	1
1	2	1	0	0	0	3
2	4	4	1	0	0	9
3	6	8	12	1	0	27
4	8	24	32	16	1	81

Het lijkt er dus op als de som van de objecten in de kruisfiguren reeks zich ook gedraagt volgens 3^n. Als we de tabel vergelijken met die van de kubussen-reeks valt op dat er in iedere rij ook dezelfde getallen staan, maar in omgekeerde volgorde. Als we kunnen aantonen beide reeksen altijd dezelfde getallen in omgekeerde volgorde hebben, dan hebben we tegelijkertijd bewezen dat ook voor de kruisfiguren-reeks de formule 3^n is. Het blijkt dat deze overeenkomsten tussen de twee reeksen ook bestaan. Dit komt door de dualiteit tussen de twee. Later zullen we hier nog op terug komen. Voor nu kunnen we stellen dat:

Stelling 6.2

Voor de som van de objecten van figuren in de kruisfiguren-reeks geldt:

$$\sum_{k=0}^{n} N_{n,k} = 3^n$$

Simplex-reeks

In het voorgaande hebben we al het verband gelegd tussen de simplex-reeks en de driehoek van Pascal. Laten we eerst eens kijken naar de som van een rij in de driehoek van Pascal:

Tabel 6.11: Driehoek van Pascal in tabelvorm

Rij, *n*										**Som**
0	1									1
1	1	1								2
2	1	2	1							4
3	1	3	3	1						8
4	1	4	6	4	1					16
5	1	5	10	10	5	1				32
6	1	6	15	20	15	6	1			64
7	1	7	21	35	35	21	7	1		128
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	256

De som van de rijen is, net als bij de kubus-reeks, afhankelijk van de manier waarop je de getallen krijgt. Ieder getal in de driehoek van Pascal wordt gevormd door de twee getallen die erboven staan. In de tabel hierboven is dat dus het getal dat er boven staat en het getal dat er links boven staat. Dit betekent ook dat ieder getal in de volgende rij steeds twee keer wordt gebruikt. Iedere rij is dus 2 keer zo groot als de voorgaande. Omdat de eerste rij een som van 1 heeft, volgt hieruit dat de som van een rij in de driehoek van Pascal te berekenen is met de formule 2^n.

Dit is echter nog niet de formule voor de som van de objecten in de simplex-reeks. De driehoek van Pascal komt immers niet geheel overeen met de simplex-reeks. Om de somformule voor de simplex-reeks te vinden moeten we dus kijken waar ze met elkaar verschillen:

Tabel 6.12

Dimensie Simplexfiguur, *n*	**Rij Driehoek, *n***									
	0	1								
0	1	1	1							
1	2	1	2	1						
2	3	1	3	3	1					
3	4	1	4	6	4	1				
4	5	1	5	10	10	5	1			
5	6	1	6	15	20	15	6	1		
6	7	1	7	21	35	35	21	7	1	
7	8	1	8	28	56	70	56	28	8	1

In *Tabel 6.12* staat de driehoek van Pascal in vergelijking met de simplex-reeks. De grijze velden komen alleen voor in de driehoek van Pascal, maar niet in de simplex-reeks. Er zijn twee opvallende verschillen tussen de rijen:

- De rij met 1'en valt weg waardoor de som van elke rij met 1 afneemt.
- De waarde van *n*, die staat voor de dimensie in de simplex-reeks en voor de rij in de driehoek van Pascal, is 1 afgenomen.

De formule van de driehoek van Pascal kennen we, namelijk 2^n. Om van deze formule naar de formule voor de simplex-reeks te komen moeten volgens het bovenstaande twee dingen doen: 1 van de rij aftrekken (volgens punt 1) en *n* wordt *n+1* (volgens punt 2). Als je dit verwerkt in de formule 2^n levert dit de volgende stelling op:

Stelling 6.3

Voor de som van de objecten van figuren in de simplex-reeks geldt:

$$\sum_{k=0}^{n} N_{n,k} = 2^{n+1} - 1$$

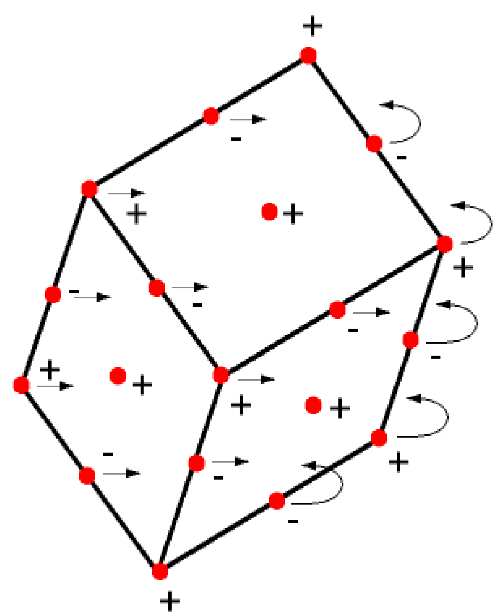
7. De stelling van Euler

In 1750 stelde de Zwitserse wiskundige Leonhard Euler (1707–1783) dat voor iedere veelvlak geldt dat

Stelling 7.1: Stelling van Euler

V + F – E = 2
Waarbij:
V het aantal hoekpunten is
F het aantal vlakken is

Er zijn verschillende bewijzen gevonden voor deze stelling. Euler zelf had een 'bewijs' waarbij hij steeds een hoekpunt van het veelvlak weghaalde, en telkens weer laat zien dat zijn formule standhoud. Als je hier echter mee doorgaat kom je uiteindelijk uit op een figuur dat geen veelvlak meer is, dus je kunt je afvragen al dit wel een goed bewijs is. Ook bewijs je natuurlijk niets door het in ieder geval weer aan te tonen, behalve dat het voor dat specifieke geval geldt. Dit 'bewijs' is dus ook niet als zodanig bruikbaar, maar het is wel een goede manier om te zien dat de formule steeds blijft gelden.

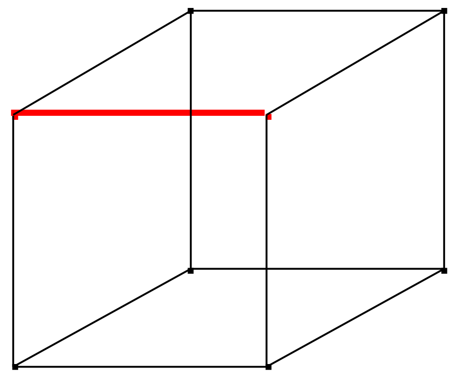


Figuur 7.1

Een zeer bekend bewijs van de stelling komt van de Amerikaanse wiskundige Bill Thurston. Hij plaatst ladingen op de hoekpunten, ribben en vlakken om tot een bewijs te komen. We geven de hoekpunten van een kubus lading +1, de ribben -1 en de vlakken +1. Vervolgens hangen we de kubus op aan een van zijn hoekpunten zodat we een hoogste punt P en een laagste punt Q krijgen. Zie *Figuur 7.1*voor een duidelijke weergave hiervan. Vervolgens verplaatsen we de ladingen van de hoekpunten en ribben naar de vlakken volgens de regel dat ze allemaal naar rechts verplaatsen (tegen de klok in dus). Zoals in de figuur te zien is, worden er telkens 2 negatieve ladingen van de ribben, plus een positieve lading van het hoekpunt naar het vlak verplaatst. In totaal wordt er naar elk vlak dus een lading van -1 verplaatst. Omdat het vlak zelf een lading heeft van +1 worden alle vlakjes neutraal. Nu alle vlakken neutraal zijn, is de enige lading die overblijft die van de punten P en Q. Deze waren beide +1, dus de totale lading wordt +2. Dit komt overeen met de stelling van Euler.

Hoewel dit een mooi bewijs is om te zien voor het geval van de kubus, wordt het al snel ingewikkeld als je het probeert te gebruiken voor andere, complexere veelvlakken. Helemaal ingewikkeld wordt het al als je naar meer dimensies gaat kijken.

Misschien wel het mooiste, meest begrijpelijke, bewijs voor de stelling werd gegeven door de Duitse wiskundige Karl George Christian von Staudt (1798-1867). Als voorbeeld in dit bewijs nemen we weer de kubus:

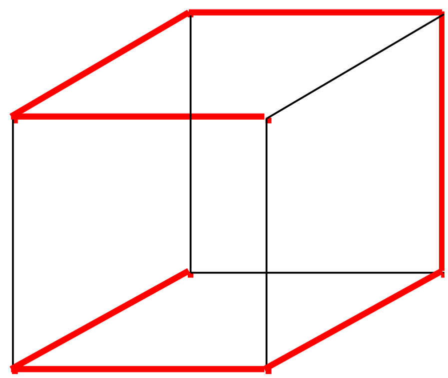


Te bewijzen

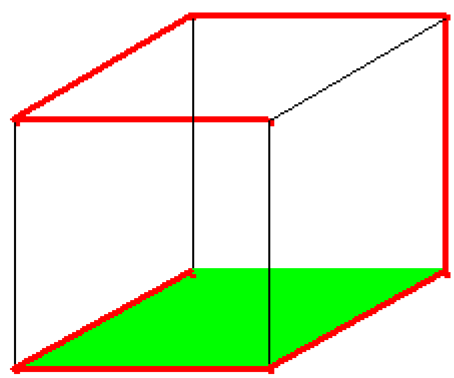
Voor een veelvlak P geldt V + F – E = 2

Bewijs

We gaan een weg maken over de kubus waarbij we alle hoekpunten aandoen. De methode die we hiervoor gebruiken is dat we eerst een willekeurige ribbe kiezen en deze een kleur geven, in dit geval rood. Door te kleuren kunnen we onthouden welke punten en ribben we al gehad hebben. Vervolgens kleuren we nog meer ribben waarbij we telkens een ribbe kiezen waarvan een hoekpunt rood is, en een ander hoekpunt nog niet gekleurd. Dit proces herhalen we totdat er geen ribben meer zijn waarmee we dit kunnen doen. Dit betekent tegelijkertijd dat alle punten gekleurd zijn. Als er immers een hoekpunt zou zijn dat nog niet gekleurd is, heeft deze altijd een verbinding met een ander punt die wel gekleurd is, oftewel: ze zijn allemaal rood.

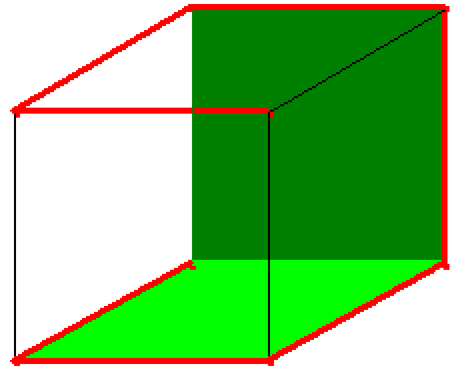


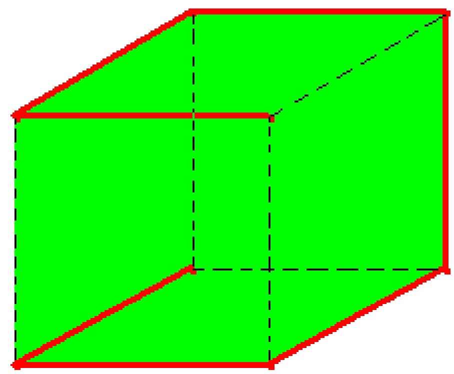
Iedere keer dat we een ribbe kleurden, kleurden we ook 1 punt, behalve bij de eerste ribbe, waar we twee punten kleurden. Dit betekent dus dat er één hoekpunt meer is dan het aantal ingekleurde ribben. In formule: E_{rood}=V-1



We hebben nu nog een aantal ribben over. En we hebben de vlakken nog niet gebruikt in het bewijs terwijl deze wel voorkomen in de stelling van Euler. Deze twee objecten vormen een gebied, dat niet onderbroken wordt, omdat de constructie van de rode ribben niet toeliet dat er drie lijnen vanuit een hoekpunt liepen. Nu we zeker weten dat het niet onderbroken wordt, kunnen we weer een zelfde soort methode toepassen bij de vlakken als bij de hoekpunten.

We kiezen een willekeurig vlak en kleuren dit vlak en een van zijn ongekleurde ribben groen. Vervolgens kiezen we telkens een vlak waarvan een ribbe al groen is en kleuren ook dit vlak en zijn ongekleurde ribbe groen. Uiteindelijk zullen er geen zijdes meer zijn met slechts één groene ribbe. Dit kan twee dingen betekenen. Of alle vlakken zijn groen gekleurd of er is een ongekleurd vlak met meer dan 1 groene ribbe. Als dit laatste geval voor zou komen zouden er twee gekleurde vlakken direct grenzen aan het ongekleurde vlak. Er zou zich dus een soort kring hebben gevormd. Wij kijken echter alleen maar naar enkelvoudig samenhangende figuren. Dit betekend dat het figuur in 2 delen uit elkaar valt als er in een kring door gesneden wordt (bij een torus gebeurd dit bijvoorbeeld niet). Als er zich een kring van vlakken zou vormen, zou het figuur dus niet enkelvoudig samenhangend zijn, en de figuren waarnaar wij kijken zijn dat wel. De enige mogelijkheid is dus dat alle vlakken zijn ingekleurd. Het aantal ribben dat we nu gekleurd hebben is E_{groen}=F-1





Nu zijn alle ribben gekleurd. Het totale aantal ribben is nu:

$E_{rood} + E_{groen} = V-1+F-1$

$E = V+F-2$

$2=V+F-E$

En hiermee is de stelling bewezen.

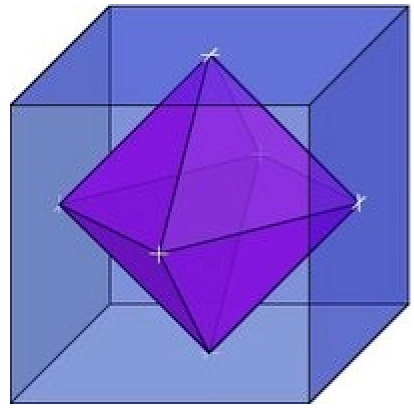
Het mooie aan dit bewijs is dat Von Staudt alleen maar gebruikt maakt van de gegevens en niets wordt toegevoegd. Andere bewijzen gebruiken bijvoorbeeld bollen of ladingen, maar Von Staudt heeft een manier gevonden waarop hij niks toe hoeft te voegen aan de gegevens. Ook is het zeer goed te visualiseren, door het principe van het kleuren.

Het vertalen van dit bewijs in de vierde dimensie is zeer lastig. Het visuele aspect van het bewijs is zeer krachtig en duidelijk maar in de vierde dimensie levert het de nodige problemen op. Hoe visualiseer je je de hyperkubus bijvoorbeeld? Hoe houdt je goed bij welke vlakken en ribben je al gehad hebt. Omdat je geen 4 dimensionaal plaatje hebt is het lastiger de ribben, vlakken en cellen in te kleuren. Ook zou een dergelijke tekening door een wirwar aan gekleurde objecten zeer onoverzichtelijk worden. Dit betekent niet dat het bewijs niet zal werken. Door zorgvuldig bij te houden welke objecten je al ‘gekleurd’ hebt, moet het mogelijk zijn het bewijs ook te leveren voor de hyperkubus. Wij zijn hier echter niet in geslaagd. Dit bleek echter ook niet vreemd te zijn: Von Staudt is het ook nooit gelukt. Ook Schlafli lukt het niet om het bewijs in de vier dimensionale ruimte te geven. Uiteindelijk was het Poincare die het wel lukte, maar via een geheel andere weg dan Von Staudt het probeerde.

8. Dualiteit

Eerder zijn we dualiteit tegengekomen in het hoofdstuk “Regelmatige Veelvlakken”. Nu we wat meer weten over de combinatoriek kunnen we dieper ingaan op dualiteit.

Als je bij een driedimensionaal figuur hoekpunten plaatst op de middens van de vlakken, krijg je de duale figuur. De duaal is dus eigenlijk een soort omkering. Voor de kubus ziet dit er uit als is weergegeven in *Figuur 8.1*:



Figuur 8.1:
Een kubus met zijn duale vorm de octaëder.

Uit onze definitie weten we al dat vlakken punten ‘worden’. Uit het plaatje worden nog meer dingen duidelijk. Zo is duidelijk te zien dat ieder hoekpunt van de kubus correspondeert met een vlak (in dit geval een driehoek) in de duale figuur. Ook zien we dat iedere ribbe in de kubus correspondeert met een ribbe in de duale figuur. De ribbes van de twee figuren staan wel loodrecht op elkaar. Meetkundig hebben we nu dus gevonden dat:

Punten worden vlakken
Ribben worden ribben
Vlakken worden punten

De objecten worden dus als het ware omgedraaid. Dit kunnen we gebruiken om toe te passen op de reeksen uit het hoofdstuk ‘Combinatoriek’:

Tabel 8.1: Dualiteit in de kubus-reeks

Dimensie	Punten	Ribben	Vlakken	Cellen	4D cellen
0	1				
1	2	1			
2	4	4	1		
3	8	12	6	1	
4	16	32	24	8	1

Als we deze veranderingen doorvoeren in de tabel krijgen we *Tabel 8.2*:

Tabel 8.2: Eerder gezien?

Dimensie	Punten	Ribben	Vlakken	Cellen	4D cellen
0	1				
1	2	1			
2	4	4	1		
3	6	8	12	1	
4	8	24	32	16	1

Deze figuur hebben we eerder gezien, dit is namelijk de kruisfiguren-reeks. In *Tabel 8.1* zijn de pijltjes beide kanten op aan gegeven. Dit is om aan te geven dat het proces ook weer omkeerbaar is. Dit betekent dus dat je vanuit de kruis-figurenreeks, door dezelfde methode te gebruiken, ook weer bij de kubus-reeks uitkomt. De figuren zijn dus duaal.

Als we dit zelfde principe toepassen op de simplex-reeks krijgen we iets opvallends te zien:

Tabel 8.3: Dualiteit in de simplex-reeks

Dimensie	Punten	Ribben	Vlakken	Cellen	4D cellen
0	1				
1	2	1			
2	3	3	1		
3	4	6	4	1	
4	5	10	10	5	1

De duaal van de simplex is dus de simplex. Dit noemen we zelfduaal. Zelfdualiteit zijn we ook al eerder tegen gekomen bij de 24-cel.

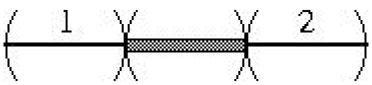
Net als bij de kubus en het achtvlak, treed er ook bij het twaalfvlak en het twintigvlak dualiteit op. We kunnen de regelmatige veelvlakken in de 3 dimensionale ruimte dus indelingen in 3 groepen:

Groep 1: Simplex
Groep 2: Kubus, Octaëder
Groep 3: Dodecaëder, Icosaëder

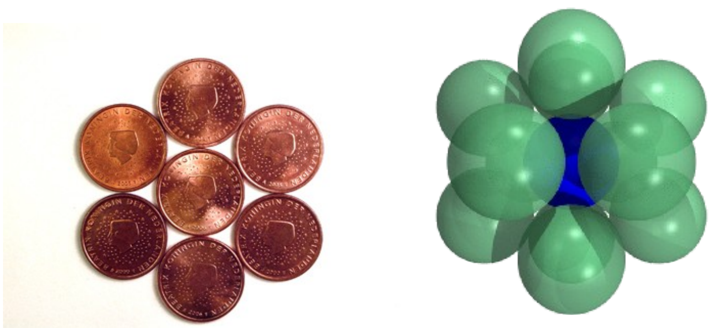
Ook in de vierdimensionale ruimte speelt de dualiteit een belangrijke rol. Zo hebben we in hoofdstuk *4. Regelmatige veelvlakken* de 120-cel gemaakt door de 600-cel te dualiseren. Zo blijkt dus dat dualiteit goed gebruikt kan worden voor het construeren van regelmatige veelvlakken.

9. Kusgetallen

Het kusgetal is het maximale aantal gelijke bollen die een bol met dezelfde straal die in het midden ligt kan aanraken, zonder dat de bollen elkaar overlappen. Vandaar ook de tot de verbeelding sprekende term. In de eerste dimensie is het kusgetal dus 2:



En in de tweede dimensie is het kusgetal zes:



Figuur 9.1

In de derde dimensie wordt het al lastiger het kusgetal te bepalen. Zo lastig zelfs, dat er in 1694 een discussie tussen Isaac Newton en David Gregory ontstond, omdat Newton dacht dat het kusgetal 12 moest zijn en Gregory dacht dat het kusgetal 13 was. Newton had een manier om 12 bollen rondom een centrale bol te schikken, maar omdat er oneindig veel manieren zijn om 12 bollen om een bol te rangschikken en er dan tussen die bollen nog ruimte overblijft, was dit voor Gregory niet overtuigend genoeg. Beide konden geen bewijs geven voor hun overtuiging. Pas in 1953 bewees Schütte en Van der Waerden onomstotelijk Newtons gelijk.
Kusgetallen in hogere dimensies bestaan natuurlijk ook, maar zijn erg lastig te berekenen, soms ook weer omdat net als in de derde dimensie er ruimte tussen de bollen overblijft, en ze op verschillende manieren te schikken zijn. De kusgetallen voor de dimensies 4, 8 en 24 zijn ook gevonden. Voor andere dimensies zijn er sinds 1970 boven en ondergrenzen van het aantal bollen in die dimensie, dus we weten tussen welke waardes de getallen liggen.

<table>
<tr><th>Dimensie</th><th>Ondergrens</th><th>Bovengrens</th></tr>
<tr><td>1</td><td colspan="2">2</td></tr>
<tr><td>2</td><td colspan="2">6</td></tr>
<tr><td>3</td><td colspan="2">12</td></tr>
<tr><td>4</td><td colspan="2">24</td></tr>
<tr><td>5</td><td>40</td><td>46</td></tr>
<tr><td>6</td><td>72</td><td>82</td></tr>
<tr><td>7</td><td>126</td><td>140</td></tr>
<tr><td>8</td><td colspan="2">240</td></tr>
<tr><td>9</td><td>306</td><td>380</td></tr>
<tr><td>10</td><td>500</td><td>595</td></tr>
<tr><td>11</td><td>582</td><td>915</td></tr>
<tr><td>12</td><td>840</td><td>1416</td></tr>
<tr><td>13</td><td>1130</td><td>2233</td></tr>
<tr><td>14</td><td>1582</td><td>3492</td></tr>
<tr><td>15</td><td>2564</td><td>5431</td></tr>
<tr><td>16</td><td>4320</td><td>8313</td></tr>
<tr><td>17</td><td>5346</td><td>12215</td></tr>
<tr><td>18</td><td>7398</td><td>17877</td></tr>
<tr><td>19</td><td>10688</td><td>25901</td></tr>
<tr><td>20</td><td>17400</td><td>37974</td></tr>
<tr><td>21</td><td>27720</td><td>56852</td></tr>
<tr><td>22</td><td>49896</td><td>86537</td></tr>
<tr><td>23</td><td>93150</td><td>128096</td></tr>
<tr><td>24</td><td colspan="2">196560</td></tr>
</table>

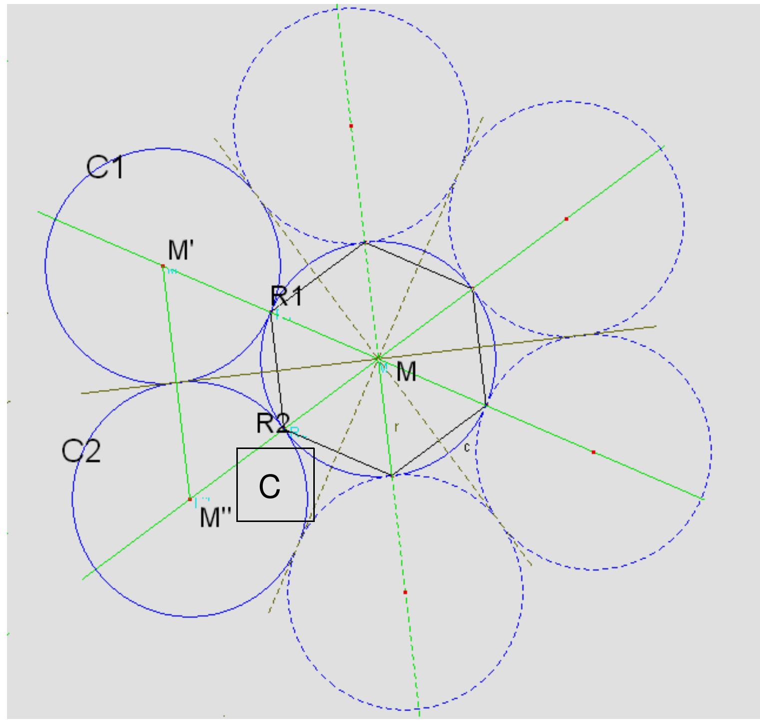
In 2006 hebben Frank Vallentin van het CWI in Amsterdam en Christine Bachoc van de Université Bordeaux die grenzen nog nauwkeuriger weten te berekenen. Ze hebben de kusgetallen voor dimensies 2, 3, 4, 8 en 24 nogmaals berekend en voor dimensie 5 hebben ze bovendien de bovengrens van 45 naar 44 teruggebracht, en in dimensie 10 de bovengrens met maar liefst 27 bollen teruggebracht.

9.1. N(2) = 6

We hebben boven op een foto gezien dat er in de tweede dimensie om een centrale bol maximaal zes gelijke bollen gerangschikt kunnen worden. Hier volgt het bewijs voor deze observatie, oftewel het bewijs voor N(2)=6

Te bewijzen:
C1 raakt aan C2
Gegeven:
Figuur 23
Lijn M',M is 2r
Lijn M'',M is 2r
Straal c = straal c1 = straal c2 = r
Hoek M',M,M'' = 60 graden

Bewijs:
Driehoek R1,R2,M is gelijkzijdig
(ingeschreven zeshoek in cirkel)
Driehoek R1,R2,M is gelijkvormig aan
driehoek M.M',M'' (zhz)
Driehoek M.M',M'' is gelijkzijdig
Dus M',M'' = M',M = M,M'' = 2r
Dus c1 raakt aan c2
Q.E.D.
Bovendien: cirkel = 360 graden
Hoek M',M,M" = 60 graden
Cirkel/Hoek M',M,M" = 6



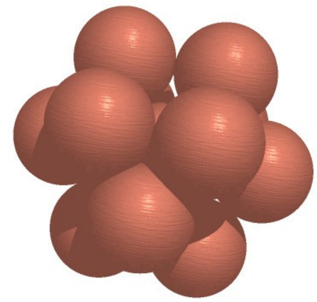
Figuur 9.2

De zes bollen passen precies in de hoeken van een regelmatige zeshoek. Dit is direct een verklaring voor de vraag waarom de zeshoek zo'n veelvoorkomende figuur is in de natuur: het is voor bollen de meest efficiënte vorm om samen te clusteren. Een sneeuwvlok is een mooi voorbeeld van een zeshoekig natuurlijk verschijnsel.

9.2 N(3) = 12

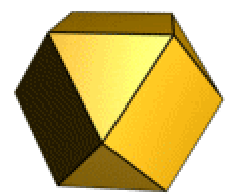
Dat de problemen die Newton en Gregory al in 1694 hadden rondom het kusgetal van de derde dimensie pas in

1953 werd opgelost geeft al te denken over de complexiteit van het probleem.
Het kusgetal van de derde dimensie kan worden geïllustreerd –niet bewezen- door in elke 12 hoeken van een icosaëder (twintigvlak) bollen met gelijke straal te plaatsen, en in het midden van de icosaëder nog een bol met weer dezelfde straal, de centrale bol. De twaalf bollen in de hoeken kussen de centrale bol dan precies. De ruimte die tussen de twaalf bollen zelf overblijft, kan niet worden gevuld met een derde bol van dezelfde grootte, maar dat bewijzen we hier niet.
Een andere manier van twaalf bollen in de derde dimensie om een centrale bol te rangschikken, is om in het midden 6 bollen rond de centrale bol te leggen, zoals we ook deden in de derde dimensie. In zowel het vooraanzicht als aan de achterzijde passen dan nog 3 bollen die ook de centrale bol raken, wat bij elkaar uitkomt op 12 kussende bollen, zie *Figuur 9.3.*



Figuur 9.3:
12 bollen gerangschikt om een centrale bol.

Dit maakt geen regelmatige figuur maar een half regelmatig figuur, een kuboctaëder. Hiernaast een plaatje, leg weer in elke hoek een bol met gelijke straal, zij raken dan een centrale bol. Op dit half regelmatige figuren gaan wij verder niet in, maar we kunnen wel zien dat elke bol de mogelijkheid heeft om aan maximaal 4 andere bollen te grenzen. Het buurgetal is dus 4.



Figuur 9.4:
Een Kuboctaëder

9.3. N(4) = 24

Zoals de 6 kussende bollen in de tweede dimensie in de hoeken van een regelmatige zeshoek passen, en de 12 bollen van de derde dimensie in de hoeken van een icosaëder, is deze rol in de vierde dimensie weggelegd voor de 24-cel. Wanneer je in elk van de 24 hoeken een vierdimensionale hyperbol plaatst, kussen alle bollen de centrale bol in het midden. Onze constructie van de 24-cel legt de hoekpunten van de 24-cel in de middens van de zijvlakken. Dit is nog niet heel duidelijk, en daarom zoeken we een andere manier om het kusgetal in de vierde dimensie te illustreren.
Het kusgetal in de derde dimensie is complex maar nog goed voorstelbaar en visualiseerbaar. In de vierde dimensie is het inderdaad nog lastiger. We hebben een manier gevonden om het kusgetal stapsgewijs te illustreren, waarbij we direct ook aangeven dat 24 het maximale kusgetal is in de vierde dimensie, door hyperbollen in een hyperkubus te plaatsen. De hyperkubus is aan het begin van deze thesis al stap voor stap uitgelegd, en de hyperbol kan op een dergelijke manier worden voorgesteld. Zoals een cirkel tweedimensionaal is,

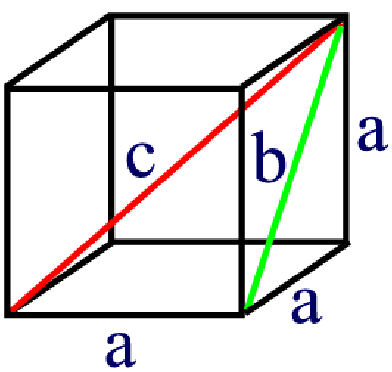
en een bol driedimensionaal is de volgende stap naar de vierdimensionale hyperbol. De 4D kubus heeft 24 vlakken die beschreven kunnen worden door de inmiddels bekende Cartesische coördinaten in de vorm (van x;y;z;t) oftewel(±1; ±1; ±1; ±1) van de 4 bijbehorende punten. Zo is een vlak dus bijvoorbeeld

	x	y	z	t
Punt a	1	1	1	1
Punt b	1	-1	1	1
Punt c	-1	1	1	1
Punt d	-1	-1	1	1

Het midden van dit vlak is (0;0;1;1). Voor alle coördinaten van middens van zijvlakken geldt dat ze bestaan uit tweemaal een (0) (juist omdat het middens zijn) en tweemaal (±1), wat ze onderscheidt van de andere middens. Zo kunnen we inderdaad 24 middens van zijvlakken vinden. Alleen uitgaande van twee (+1)'en kunnen we de eerste (+1) op 4, de tweede (+1) op 3 coördinaten zetten. Dan zijn alle mogelijkheden echter dubbel keer geteld, dus we komen uit op 4*3/2 = 6 uit. Omdat we zo 4 mogelijkheden hebben, namelijk ook nog (+1) & (-1); (-1) & (+1) ; en (-1) & (-1), krijgen we (4*3/2)*4 = 24 punten.

In het midden van de hyperkubus plaatsen we de centrale hyperbol, dus op de coördinaten (0;0;0;0). Op elk van de middens van de 24 zijvlakken willen we nu een bol plaatsen, met als middelpunt van de bol het midden van het vlak. De eerste twee vereisten zijn dat deze 24 bollen dezelfde straal moeten hebben als de centrale bol rond en dat ze elkaar moeten raken. Ze mogen elkaar niet snijden, maar ook niet 'los' rondzweven (in het eerste geval gebruik je een kleinere cirkelomtrek waardoor het kusgetal eventueel kleiner van wordt, in het tweede geval een grotere cirkelomtrek waardoor het kusgetal eventueel groter wordt. In beide gevallen is er van kussen geen sprake meer). De afstand tussen het midden van elke willekeurige zijvlak en de centrale bol is als volgt te berekenen.

Aangezien elk midden van een zijvlak bestaat uit (±1;±1;0;0) in welke de (0)'en en de (±1)'en in alle volgordes voorkomen, kunnen we de afstand tot de centrale bol (0;0;0;0) met de stelling van Pythagoras berekenen.



Figuur 9.5

> Stelling van Pythagoras:
> In een rechthoekige driehoek is het kwadraat van de lengte van de hypotenusa gelijk aan de som van de kwadraten van de lengtes van de rechthoekszijden.
> Oftewel: $A^2 + B^2 = C^2$

De stelling van Pythagoras in meerdere dimensies is een uitbreiding op de ons bekende Pythagoras.
In de kubus hiernaast hebben alle ribben lengte 1. Volgens Pythagoras geldt $b = \sqrt{(a^2+a^2)} = \sqrt{(2)}$ **.** Dit geldt dan ook voor de bodem van de kubus. Als we dan Pythagoras op de bodem $\sqrt{(2)}$ en de 'achterste' a toepassen, krijgen we voor c, de hoofddiagonaal, $\sqrt{((\sqrt{(2)})^2 + a^2)} = \sqrt{(3)}$. Voor Pythagoras in meerdere dimensies geldt dan dus dat elke dimensie onder de wortel komt te staan. Voor de hyperkubus waar we mee werken voor de kusgetallen, geldt dan dus: **hoofddiagonaal =** $\mathbf{\sqrt{(x^2+y^2+z^2+t^2)}}$**.** Opvallend is dat wanneer de ribbes lengte 1 hebben, hetvolgende altijd geldt: hoofddiagonaal in dimensie X = $\sqrt{(X)}$. De hoofddiagonaal in een 1000D hyperkubus berekenen, is dus een koud kunstje: $\sqrt{(1000)}$. Voor de lengte van de hoofddiagonaal in een hyperkubus geldt bovendien altijd dat deze hoofddiagonaal twee maal de ribbe is.

De afstand tussen het midden van een zijvlak en de centrale bol is dan als volgt uit te rekenen:

$\sqrt{((\pm1)^2 + (\pm1)^2 + (0)^2 + (0)^2)}$ **= (afstand midden vlak tot midden centrale bol) =** $\sqrt{(2)}$

De straal van alle 24 bollen én de centrale bol, moet dan dus de helft zijn, namelijk: **r = ½$\sqrt{(2)}$**. Als alle bollen deze straal hebben, raken dus alle 24 bollen de centrale bol precies, zonder te snijden.
Nu moeten we controleren of we zo ook voldoen aan het derde vereiste, namelijk dat de 24 bollen onderling ook niet snijden. Ze mogen wel raken of überhaupt geen contact hebben. Hiervoor kijken we naar de kleinste afstand tussen de middens van de zijvlakken. Die kleinste afstand is vanzelfsprekend te vinden tussen middens van zijvlakken waarvan de zijvlakken naast elkaar liggen, zogenaamde buren. Buren herken je aan de coördinaten wanneer de (x;y;z;t) coördinaten van de middens, onder de blijvende voorwaarde van tweemaal een (0) en tweemaal (±1), maximaal gevarieerd zijn van (0) naar (±1) en andersom. Een buur van het punt (0;0;1;1) waar we mee begonnen, is bijvoorbeeld (1;0;1;0), maar (-1,0,-1,0) is van beide geen buur. Oftwel: een verschil in een coördinaat van (+1) naar (-1) sluit uit dat de zijvlakken waarop de middens liggen buren zijn. Dat is begrijpelijk wanneer je je voorstelt dat het midden dan aan de andere kant van het figuur ligt, met ertussen nog het midden met het coördinaat (0).
De korste afstand met een buur is dus bijvoorbeeld door de afstand tussen de reeds genoemde (0;0;1;1) en (1;0;1;0) te berekenen. Dat kunnen we, weer met behulp van Pythagoras, als volgt doen:

$\sqrt{((\pm1)^2 + (0)^2 + (0)^2 + (\pm1)^2)} = \sqrt{(2)}$

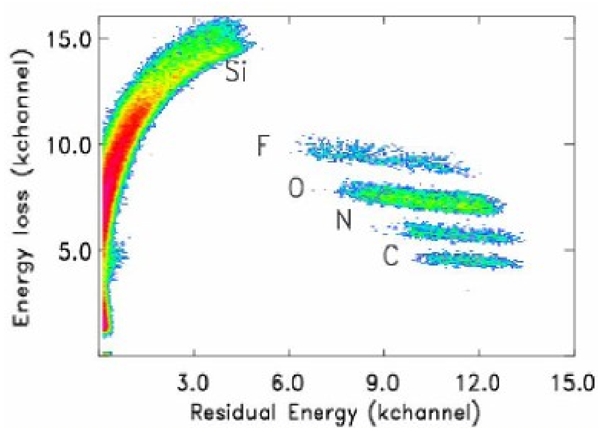
Bollen met een straal van r = ½$\sqrt{(2)}$ raken elkaar dus precies, maar snijden elkaar niet, zoals vereist was. Dat de buren elkaar steeds raken betekent nog iets anders: dat er geen 25ste bol tussen lijkt te kunnen.
Zo is het kusgetal van de vierde dimensie, namelijk 24, geïllustreerd.

10. Toepassingen

Tot nu toe zijn wij in onze thesis alleen ingegaan op de meetkundige en wiskundige kant van ruimtelijke dimensies. Misschien is hierdoor de indruk ontstaan dat deze kennis verder helemaal niet toegepast wordt. Dit is echter niet waar. Het meest bekend is misschien nog wel de toepassing in de natuurkunde. Moderne theorieën vereisen soms wel vijf of elf dimensie om toegepast te kunnen worden. Maar dimensies worden ook gebruikt in data analyse, bij het verzenden van binaire reeksen, in de kunst en er zijn zelfs spirituele toepassingen.

10.1. Data analyse

Data analyse is het bestuderen van gegevens. Het is bekend dat veel gegevens die in een tabel staan niet zo overzichtelijk zijn. Daarom worden van tabellen vaak grafieken gemaakt. Bijvoorbeeld: In de stad is een bevolkingsonderzoek gehouden. Nu wil de onderzoeker kijken of er een verband bestaat tussen de lengte en het gewicht van de proefpersonen. Een tabel is daarbij niet zo behulpzaam,dus hij maakt een punten diagram van zijn gegevens. Hij heeft hier twee assen voor nodig, een voor de hoogte en een voor het gewicht. Wil hij nu ook de haarkleur met de lengte en het gewicht vergelijken, dan moet hij een derde as toevoegen, en wordt zijn diagram driedimensionaal. Voor een voorbeeld, zie *Figuur 10.1.*



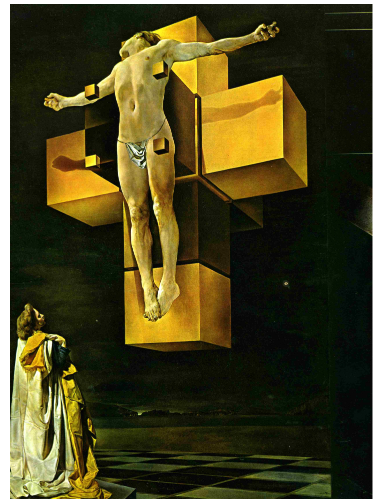
Figuur 10.1:
Een driedimensionaal punten diagram, waarbij de derde dimensie is weergegeven met behulp van kleurverschillen.

Samengevat, het aantal variabelen dat vergeleken wordt bepaald het aantal assen dat nodig is in het diagram en dus de dimensie van het diagram.
Natuurlijk zullen wij problemen hebben met het interpreteren van een vierdimensionaal diagram, en daarom zullen wij mensen zo'n vierdimensionaal diagram liever opsplitsen in meerdere diagrammen, waardoor het beter leesbaar is voor ons.

10.2. Verzenden van binaire reeksen

Voor het (draadloos) overzenden van gegevens wordt het bestand 'vertaald' naar pakketjes van binaire getallenreeksen. Elk pakketje staat dan voor een letter, de kleur van een pixel van een afbeelding of een cijfer. Zo'n getallenreeks zou er als volgt uit kunnen zien: {0,1,1,0}.

Bij het verzenden van dit soort getallenreeksen kan af en toe wat fout gaan. Een 1 zou bijvoorbeeld ontvangen kunnen worden als 0. Hierdoor verandert de code. Om te voorkomen dat de betekenis van de code ook verandert is het nodig om de codes zo te verdelen dat de verandering van een 1 in een 0 of omgekeerd geen andere code tot gevolg heeft. Hoe je dit doet? Zie de code als een Cartesische coördinaat. Nu is het mogelijk om de afstand tussen verschillende codes uit te rekenen. Zo is de afstand tussen de code {0,0,0,0} en {1,1,1,1} gelijk aan $\sqrt{(4)} = 2$. De bedoeling is dat de afstand tussen elke code zo groot is dat een afwijking van 1 – een 0 die als 1 wordt ontvangen of een 1 die als 0 wordt ontvangen – geen andere code oplevert en zo dicht bij de oorspronkelijke code ligt dat je ook uit de foutieve code kan afleiden wat het zou moeten zijn.
Deze methode werd en wordt gebruikt bij het verzenden van foto's van andere planeten naar de aarde; bij het draadloos versturen van gegevens en bij de codering op een cd of dvd (hierdoor wordt voorkomen dat je cd blijft hangen als er een krasje op komt).



Figuur 10.2: Crucifixion (Corpus Hypercubus) van Dali.

10.3. Kunst

Sommige kunstenaars maken dankbaar gebruik van wiskunde in hun kunstwerken. Misschien wel het best passend in onze thesis is de bekende Spaanse schilder Salvador Dali (1904-1989). Deze surrealistische schilder was namelijk gefascineerd door de hyperkubus. In een van zijn schilderijen is dat heel duidelijk zichtbaar: *Crucifixion* ook wel *Corpus* Hypercubus genoemd, Staat een gekruisigde man afgebeeld. Hij is niet gekruisigd aan een gewoon kruis, maar aan een uitgevouwen hyperkubus. Zie *Figuur 10.2.*

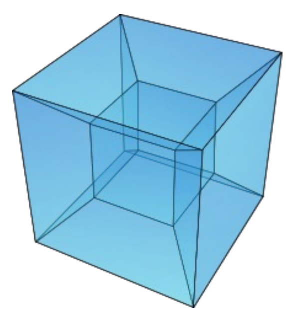
Niet alleen schilders, ook beeldhouwers maken soms gebruik van meetkunde als inspiratiebron voor hun kunstwerken. Vaak hebben deze kunstenaars ook belangstelling voor wiskunde, of zijn ze wiskundige geweest. Hun beeldhouwwerken zijn vaak polyeders uit de derde of uitslagen van polyeders uit de vierde dimensie. Zie *Figuur 10.3.*

Figuur 10.3: Duodecedron Abscisus Elevatus Vacuus

Er zijn zelfs verhalen geschreven die het nodige met dimensies te maken hadden. Zo gaat *And He Built a Crooked House* van Robert A. Heinlein over een jonge architect die een huis ontwerpt dat de vorm heeft van een uitgevouwen hyperkubus. Het huis heeft wel een paar nadelen, ben je er eenmaal in, dan kom je er niet meer uit, want door te klimmen naar het dak eindig je in de kelder. Ook is het huis niet aardbevingsbestendig. Bij een aardbeving, het stond in Californië, het in tot een 'gewone' hyperkubus en verdwijnt het uit onze wereld. Ook *The Church of the Fourth Dimension* van Martin Gardner gaat over de vierde dimensie. In dit geval een kerk die de vorm heeft van (weer) een uitgevouwen hyperkubus. Het voordeel van deze kerk is dat je door af te dalen in de kelder uitkomt op de bovenste verdieping.

En dan is er natuurlijk *Flatland, A Romance of many Dimensions's* van Edwin A. Abbott, die dit boek al in 1884 schreef. In dit boek probeerde Abbott het begrip van multi-dimensionale meetkunde te populariseren, maar het boek is ook een knappe satire op de sociale, morele, en godsdienstige waarden van die periode. Abbott had duidelijk kritiek op de *oppervlak*kige samenleving waarin hij leefde.
In *Flatland* vertelt A. Square over de wereld waarin hij leeft, die slechts twee dimensies kent. De bewoners van zijn wereld, Flatland, en hijzelf ook, kennen het bestaan van een derde dimensie niet. Tot op een dag een wezen, zijn naam is Sphere, van de derde dimensie ('Spaceland') aan hem verschijnt. A. Square is totaal verbijsterd door de onmogelijke dingen die dit wezen kan (wij weten dat het een bol is, maar A. Square ziet slechts – steeds verschillende – doorsnedes van de bol). Door naar boven en beneden te bewegen, richtingen die A. Square niet kent, verandert de bol bijvoorbeeld van een stip naar een cirkel, en weer naar een stip voor A. Square's perspectief. Om A. Square te helpen neemt de bol, die volgens A. Square wel goddelijk moet zijn, mee naar een dimensionale analogie, namelijk Lineland. Lineland is een eendimensionale wereld bevolkt door lijnen. A. Square kan alle wezens in Lineland tegelijk zien, tot grote verbazing van de inwoners zelf. Later neemt Sphere A. Square mee naar Spaceland en voor A. Square gaat een wereld open…

10.4. Spiritualiteit



Figuur 10.4: Schaduwmodel van een hyperkubus.

Spiritualiteit is een geestelijke levenshouding. Bepaalde mensen zijn ervan overtuigd dat er meer dan de drie waarneembare dimensies zijn. Omdat wij ons vooral verdiept hebben in de meetkundige kant van ruimtelijke figuren kunnen wij hier niet diep op ingaan, maar wij willen dit onderwerp wel even aanstippen.
Zoals gezegd zijn sommige mensen ervan overtuigd dat de vierde dimensie bestaat, en dat door een bepaalde toegewijde levenshouding en door meditatie het mogelijk zou zijn om de vierde dimensie waar te nemen. Eén van de manieren om zover te komen is veelvuldig het schaduwmodel van een hyperkubus te bestuderen, zie *Figuur 10.4,* plotseling zou je dan een extra dimensie moeten kunnen waarnemen.
Bepaalde mensen vinden dat wij onszelf moeten overtreffen. En dan niet overtreffen op het gebied van materiele

prestaties, maar jezelf overtreffen op geestelijk vlak. Zo schreef Theo van Doesburg in 1920 in het tijdschrift De Stijl:

> *Wat wij van de mathematica moeten leren is het systeem der uitbreiding. Willen wij van uit het punt –ik een overlichamelijke-uitgebreid-ik […] construeeren dan moeten wij beginnen ons van punt-ik (een toestand van geheel in zichzelf afgesloten individualisme) tot lijn-ik, van lijn-ik tot vlak-ik, van vlak-ik tot lichaam ik, van lichaam-ik tot overlichamelijk-uitgebreid-ik ontwikkelen. Dit gaat niet zonder dat wij ons voorgaand ik gedurig in liquididatie brengen. Deze mathematische evolutie, deze vermenigvuldiging van levensassen is den modernen mensch noodzakelijk.*

11. Conclusie

Gezien de uitgebreidheid van ons onderzoek is het lastig een conclusie te trekken.
Wij wilden te weten komen wat de eigenschappen van meerdimensionale figuren zijn en hoe we ons deze figuren kunnen voorstellen.

- Eén van de eerste en misschien wel belangrijkste eigenschap van elk figuur dat meer dan drie dimensies heeft, is dat wij zo'n figuur niet meer kunnen voorstellen. Het is echter wel mogelijk om een figuur uit hogere dimensies te 'vertalen' naar dimensies die voor ons waarneembaar zijn, door er uitslagen, Schlegel diagrammen, of hoekpunt figuren van te tekenen. Ook is het mogelijk om met behulp van Cartesische coördinaten deze figuren te beschrijven.

- Ook al zijn wij niet in staat om te bewijzen dat er meer dan vier dimensies zijn, wij kunnen wel berekenen hoe bepaalde meetkundige figuren er in hogere dimensies uitzien en uit welke onderdelen deze figuren zijn opgebouwd. Het is duidelijk geworden dat er in de meeste dimensies maar drie regelmatige figuren waren. Al deze figuren waren analogieën van elkaar. De 24 cel is een uitzondering, het is een regelmatig figuur dat alleen in de vierde dimensie bestaat.

- Sommige regelmatige figuren zijn duaal aan elkaar. De dualiteit kan gebruikt worden om uitgaande van een figuur een ander te vinden. Ook kun je, wetende dat twee figuren duaal aan elkaar zijn, snel conclusies trekken over een van beide figuren als het andere bekend is.

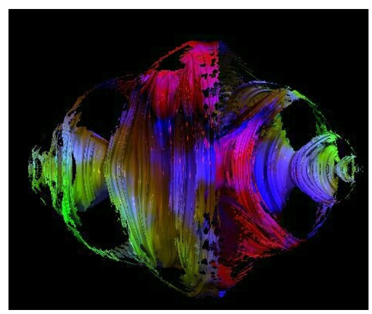
Daarnaast hebben wij ook nog een paar andere terreinen verkend. Wij zijn ingegaan op kusgetallen en de stelling van Euler. Wij hebben aangetoond dat het kusgetal in de derde dimensie zes, en in de vierde dimensie twaalf is. Ook de stelling van Euler is bewezen voor de derde dimensie. Deze stelling was bijzonder praktisch, omdat het ons hielp na te gaan of een berekend figuur ook in werkelijkheid zo zou kunnen zijn.

Ook hebben we nog een klein hoofdstuk aan de toepassingen van dimensies gewijd. Dimensies worden gebruikt bij data analyse in de kunst en er zijn spirituele toepassingen.

12. Discussie

Al voordat de zomervakantie van 2006 was begonnen, hadden we nagedacht over het onderwerp van de thesis. We wisten namelijk dat we er rekening mee moesten houden dat een van ons er vrijwel de gehele tijd niet persoonlijk bij kon zijn, omdat Anne-Lotte in de Verenigde Staten zou zijn voor enkele maanden. Door her en der wat om advies te vragen, zijn we op het idee van dimensies gekomen. Een voordeel van dit onderwerp was dat er geen experimenten uitgevoerd hoefden te worden waar iemand dan bij gemist zou worden. Aan de andere kant was het lastig een onderzoeksvraag te formuleren, aangezien we feitelijk allemaal kleine (theoretische) onderzoekjes hebben gedaan naar verschillende ‘dimensieproblemen’, en daardoor is het ook moeilijk conclusies te trekken. Bovendien is het lastiger een eigen onderwerp te verzinnen, omdat er nog geen hapklare thesis stappenplan klaar ligt dat je kunt volgen. We moesten daarentegen zelf bedenken wat en hoe we dan wilden onderzoeken en te weten wilden komen. Dimensies is een heel breed begrip, en er waren heel veel subonderwerpen waar voor we moesten kiezen die niet te behandelen.

Een vervolgonderzoek zou dan ook veel verschillende dingen kunnen onderzoeken. We hebben nu bijvoorbeeld alleen onderzoek gedaan naar de ruimtelijke dimensies. Een volgend onderzoek kan zich richten op de ruimtetijd, de vierde dimensie die Einstein gebruikt in zijn Relativiteitstheorie. Met ruimtetijd komen we al op een wat meer toegepaste vlak dan wij bezig zijn geweest. Wij hebben ook weinig tijd gestoken in de toepassing van verschillende dimensies in astronomie, kunst, of bijvoorbeeld geloof, waar je ook aandacht aan zou kunnen besteden. Een vervolgonderzoek zou zich ook bezig kunnen houden met *Quaternion Julia fractals*. Dit zijn vierdimensionale figuren, die niet alleen prachtig en toch simpel zijn, je kunt ze ook zelf maken. (Zie *Figuur 12.1*)We hebben het in onze thesis niet meer gehad over fracties met gebroken dimensies,wat aanvankelijk wel het plan was. Wij hadden er de tijd niet meer voor, maar het zou ook weer een goed vervolgonderzoek zijn. Het is toepasbaar, en toch ook opmerkelijk: want wat is nou een fractionele dimensie?



Figuur 12.1:
Een Quaternion Julia figuur

Verder hadden we nog meer kunnen kijken naar de doorsnedes van figuren. Het was ook leuk geweest een echt bewijs te geven voor de stelling van Euler. Bij een vervolgonderzoek over kusgetallen zou het interessant, maar pittig, zijn te kijken naar de formules voor minimale en maximale kusgetallen in dimensies, en waar die formules vandaan komen. En voor de dimensies 8 en 24, waar het kusgetal bekend is, zou je het kusgetal kunnen proberen te construeren.

Deze thesis hield zich bezig met heel andere stof dan wat wij ooit behandeld hebben. Het was daarom ook best lastig en zoeken naar waar we precies op wilden focussen, en wat ons doel was. En hoe we onze onderzoekingen moesten gaan uitvoeren. De communicatie en samenwerking is goed verlopen, zeker gezien het feit dat een van ons in de Verenigde Staten was. Dat maakte de dingen wel lastiger, maar we hebben daar goed op in weten te spelen, en het heeft volgens ons tot een mooie thesis geleid.

13. Bronvermelding

Boeken

1. Nothing All (1954). *Inzicht in de vierde Dimensie.* P. Noofdhoff N.V.
2. Coxeter H.S.M. (1973). *Regular Polytopes.* Dover Publications
3. Abbott E.A. (1992). *Flatland, a Romance of many Dimensions.* Dover Publications
4. Banchoff, Thomas F. (1996). De Vierde Dimensie. Natuur & Techniek
5. Banchoff, Thomas F. (1990) *Beyond the Third Dimension: Geometry, Computer Graphics, and Higher Dimensions* Scientific American Library
6. Jacobs, Harold R. (1987) *Geometry* W.H. Freeman and Company
7. Rucker, Rudolf V. B. (1977) *Geometry, Relativity and the Fourth Dimension* Dover Pubns
8. Wheeler, John Archibald (1990) *A Journey into Gravity and Spacetime* W.H. Freeman and Company
9. Peterson, I. (2001). *Fragments of Infinity, A kaleidoscope of math and art.* John Wiley & Sons
10. Bragdon, Claude (1939). *Primer of Higher Space.* Kessinger Publishing.
11. Howard Hinton, C. (1904). *The fourth Dimension.* Kessinger Publishing.
12. Gardner, Martner (1991). *The Church of the fourth Dimension.* The University of Chicago Press
13. Henlein, Robert A. (1999). *And he built a crooked House.*

Websites

1. http://www.tenthdimension.com/flash2.php Geraadpleegd op 19 september 2006
2. http://www.rmcybernetics.com/science/physics/dimensions_infinite_universe.htm Geraadpleegd op 19 september 2006
3. http://en.wikipedia.org/wiki/Tesseract Geraadpleegd op 19 september 2006
4. http://news.bbc.co.uk/1/hi/sci/tech/3175352.stm Geraadpleegd op 6 november 2006
5. http://users.tkk.fi/~ppuska/mirror/Lounesto/4D Geraadpleegd op 6 november 2006
6. http://www.paideiaschool.org/TeacherPages/Steve_Sigur/resources/reflections%20on%20duality.pdf Geraadpleegd op 6 november 2006
7. http://www.science.uva.nl/onderwijs/wns/onderwijsCD/symmetrie Geraadpleegd op 13 november 2006
8. http://www.en.wikipedia.org/wiki/Schläfli_symbol Geraadpleegd op 13 november 2006
9. http://www.cse.unl.edu/~choueiry/S06-235/files/Combinatorics-HandoutNoNotes.pdf Geraadpleegd op 13 november 2006
10. http://en.wikipedia.org/wiki/Schlegel_diagram Geraadpleegd op 11 december 2006

11. http://en.wikipedia.org/wiki/Net_%28polyhedron%29 Geraadpleegd op 11 december 2006
12. http://www.cs.sunysb.edu/~cse125/notes/08-4D-Forms.ppt Geraadpleegd op 11 december 2006
13. http://www.steelpillow.com/polyhedra/vertex_figures/VertexFigures.htm#intro Geraadpleegd op 13 december 2006
14. http://www.math.tu-berlin.de/~fpfender/papers/AMS.pdf Onder andere geraadpleegd op 18 december 2006
15. http://www.msri.org/publications/ln/msri/2003/canddgeom/musin/1/index.html Onder andere geraadpleegd op 18 december 2006
16. http://www.math.union.edu Onder andere geraadpleegd op 18 december 2006
17. http://www.kennislink.nl/web/show?id=140135 Onder andere geraadpleegd op 18 december 2006
18. http://www.sciencenews.org/articles/20041002/bob9.asp Onder andere geraadpleegd op 18 december 2006
19. http://users.adelphia.net/~eswab/ Onder andere geraadpleegd op 18 december 2006
20. http://www.geom.uiuc.edu/~banchoff/ISR/ISR.html Geraadpleegd op 18 december 2006
21. http://www.en.wikipedia.org/wiki/Salvador_dali%C3%AD Geraadpleegd op 18 december 2006

Naast deze boeken en websites hebben wij dankbaar gebruikt gemaakt van CABRI en Excel om een beter inzicht te krijgen in figuren die uit meer dan drie dimensies bestaan.

Bijlage: Commentaar Thesis ‘Gamebedrijven’

Ons commentaar

Het eerste wat opviel aan de thesis was dat het een interessant onderwerp waar je verschillende kanten mee op zou kunnen gaan. Wij waren dan ook benieuwd welke insteek jullie gekozen hadden. Over het algemeen zag het er allemaal mooi ook, met veel mooie foto’s en diagrammen. Er miste nog wel een paar stukken waar we dus ook geen commentaar op hebben kunnen geven. De stukken waar we wel commentaar op hebben kunnen geven volgen hieronder.

Inleiding

- Inleiding: game-industrie, niet gamesindustrie
- Opzet van het onderzoek: Jullie onderzoeksvraag is hoe je een succesvol Nederlands gamebedrijf kan oprichten. Maar je achterliggende bedoeling is te onderzoeken hoe Nederland een grotere rol kan spelen in de game-industrie. Is dat wel hetzelfde?
- Bij de uitvoering: Jullie hebben jezelf een aantal taken gesteld, met als eerste uit zoeken of je reiskosten vergoed worden. Het staat leuk, maar is het relevant voor je onderzoek? Was je anders niet naar de bedrijven gegaan?

Resultaten

- het puntensysteem: zeg nog even dat dit per week is
- het is jammer dat het puntensysteem zo weinig oplevert. Kan je de gegevens niet zo intepreteren dat ze wat meerzeggend zijn? Bijvoorbeeld door een antwoord als '2-5 uur' standaard op te vatten als 3,5 uur – dan kan je wel gemiddeldes uitrekenen. Andere enquetès werken toch ook met dit soort intervallen, dus ik kan me haast niet voorstellen dat je deze gegevens niet mooier kan interpreteren.
- Het vergelijken van de grafieken van jongens en meisjes is lastig omdat de grafieken niet onder of naast elkaar staan. Het alleroverzichtelijkst zou zijn als je die twee grafieken die je wilt vergelijken in een grafiek zet. (Dus twee verschillende waarden in verschillende kleuren bij elke console.) Geef in elk geval in de titel aan of we naar resultaten van meisjes, jongens, of gecombineerd kijken. Je hebt nu steeds drie grafieken met dezelfde titel.
- Op vraag 8 (Heb je een leuk idee voor een computergame?) gaan jullie maar weinig in. Kan je hier niet nog iets meer zeggen over originaliteit, misschien ook gelinkt aan game-activiteit? Zijn het de gamers, of juist de niet-gamers die een andere game (wél) zouden zien zitten?

- de begrippenlijst in alfabetische volgorde is een stuk overzichtelijker

Bedrijven

Het deel over bedrijven is op zich heel leuk geschreven. Wij kregen een duidelijk beeld hoe de verschillende bedrijven verschillen en de diagrammen hielpen om de Supply Chains wat beter in beeld te krijgen.
De relevantie van de dingen die verteld werden was alleen niet altijd even duidelijk. Het was interessant om te lezen hoe ieder bedrijf verschilt in het maken van games, maar de cijfers ontbraken een beetje. Zo werd het niet helemaal duidelijk waarom je nou voor een bepaalde ontwikkelmethode zou moeten kiezen. Jullie thesis gaat specifiek over een gamebedrijf in Nederland. De vraag hoe deze Nederlandse bedrijven dan verschillen van Amerikaanse of Franse blijft onbeantwoord hoewel wij toch denken dat het belangrijk is dat nader toe te lichten, aangezien jullie voor een Nederlands bedrijf kiezen. Ook lieten jullie een beetje in het midden waarom het handig zou zijn om een bedrijf in Nederland op te richten. Zijn er subsidies? Hoe staat de overheid er tegenover? Allemaal vragen die volgens ons wel belangrijk zijn om de relevantie van de onderzoeksvraag wat duidelijker te maken en wat er wat dieper op in te gaan.
Verder nog de volgende punten:

- De kopjes van ieder bedrijf zijn even groot als die van Supply Chain
- De supplychain diagrammen zijn soms een beetje onoverzichtelijk
- Onderschriften van de plaatjes zijn af en toe een beetje nutteloos: is het van belang voor jullie onderzoek welke koelkast een bepaald bedrijf heeft.
- Jullie noemen met betrekking tot Flash Macromedia, misschien kun je het na de overnamen beter Adobe noemen.
- In de Supply Chain van VSTEP staat PTT, wat hiermee bedoeld wordt is niet helemaal duidelijk
- In de Supply Chain van VSTEP vermelden jullie MySQL. Is dit zoveel belangrijker dan bijvoorbeeld de gebruikte webserver of het gebruikte OS? Als je MySQL noemt moet je misschien ook nog de andere gebruikte software noemen.
- In de Supply Chain van Zylom hebben jullie ervoor gekozen om Java en Flash met een pijl naar de klant te wijzen. Waarom niet hetzelfde doen met DirectX bij de andere Supply Chains?

Ook viel het op dat jullie verschillende woorden in de woordenlijst hebben staat die niet in je thesis voor komen (bijv. Linux, PHP). Misschien kun je je begrippenlijst wat inkorten door deze weg te halen.

Conclusie

- In jullie Conclusie onder de eerste deelvraag, hebben jullie het over ‘Eximion’ een naam die verder nergens genoemd is. Is dit een bedrijf dat jullie in de rest van het verslag geschrapt hebben?

- Begrippenlijst: hebben jullie al deze begrippen ook gebruikt in je verslag?

Onze algemene indruk was dat het een goed geschreven thesis is. Toch miste er in de versie die wij te lezen hebben gekregen nog grote stukken: hier moet dan ook nog een hoop aan gebeuren. Verder viel op dat de grafieken alleen maar beschreven worden, maar er wordt verder niks mee gedaan. Als de lezer wil weten wat er in staat, kan hij ook in de grafiek kijken en de beschrijvingen zijn af en toe dus een beetje overbodig. Verder mist de samenhang tussen de verschillende stukken af en toe een beetje maar hopelijk wordt dit opgelost door de stukken die nu nog missen. Ons belangrijkste bezwaar is dat het af en toe een beetje oppervlakkig blijft omdat er wel veel resultaten worden gegeven, maar er wordt niet zoveel mee gedaan. Maar dit zal waarschijnlijk deels worden opgelost door de open stukken in te vullen.

Wat wij hiervan geleerd hebben

Deze thesis verschilt in veel met onze thesis, en het is bovendien lastig dat er nog stukken in ontbraken. Toch hebben we van ons eigen kritiek nog wel een aantal dingen geleerd. Dat het belangrijk is dat je een goed geformuleerde en weloverdachte onderzoeksvraag hebt bijvoorbeeld, en dat je in je thesis daar dan ook duidelijk antwoord op geeft. Ook werd het ons erg duidelijk dat het belangrijk is dat je in je thesis je zoveel mogelijk beperkt tot relevante informatie (en plaatjes), maar er wel zeker van moet zijn dat je genoeg informatie geeft. Genoeg informatie dus om je onderzoeksvraag te beantwoorden, maar ook om je thesis 'thesis-waardig' informatief en interessant te laten zijn. Ook vonden we hun begrippenlijst niet erg overzichtelijk, en bovendien bespraken ze termen die niet terugkwamen in de thesis. We zagen in dat onze eigen begrippenlijst ook (nog meer zelfs) te uitgebreid was, en wij hebben onze begrippenlijst uberhaupt maar geschrapt en de informatie geïntegreerd in de rest van de thesis, omdat dat makkelijker en overzichtelijker is voor de lezer.

De thesis "Gamesbedrijven in Nederland" leest wel heel erg makkelijk weg, en dat is van onze thesis niet goed te zeggen. We hebben ons best gedaan op een aantal punten onze thesis ook wat toegankelijker te presenteren.

Bijlage: Logboeken

Logboek Thesis Lotte

Wat	Wanneer	Hoe lang
Bedenken onderwerp + overleggen onderwerp + lezen literatuur	Voor zomervakantie	6 uur
Opzoeken literatuur	25 sept	1 uur
Lezen	30 sept	2 uur
Lezen	1-14 okt.	6 uur
Orientatie	1-7 okt.	4,5 uur
Kusgetallen en reeksen	9 oktober	1,5 uur
Kusgetallen n-D	10 oktober	2 uur
Inleidingschets	20 nov.	3 uur
Inleidingschets	22 nov.	6 uur
Inleidingschets	24 nov.	4 uur
Boeken over kusgetallen zoeken en begrijpen	1 december	8 uur
Boeken en sites over kusgetallen bestuderen	2 december	7 uur
Aanpassen inleidingschets	4 december	2,5 uur
Kusgetallen	6 december	6 uur
Reageren combinatoriek	7 december	1,5 uur
Kusgetallen	9 december	6,5 uur
Aanpassen inleidingschets	11 december	0,5 uur
Concept kusgetallen (af)	11 december	3 uur
Schrijven inleiding	13 december	1 uur
Reageren 24-cel & coördinatenweergaves	13 december	1 uur
Schrijven discussie	16 december	1,5 uur
Doorlezen commentaar meneer Goddijn, starten met commentaar gebruiken	8 januari	3 uur
Bespreking met Aad Goddijn	9 januari	1,5 uur
Lezen 'Fourfield: Computers, Art & the 4th Dimension" van Tony Robbin	12 januari	1 uur
Becommentariëren thesis 'Games' en lezen beschikbaar commentaar op	13 januari	2 uur

onze thesis		
Herzien inleiding, deel kusgetallen, herplaatsing begrippen, overleg	15 januari	4 uur
Bespreking met Aad Goddijn	15 januari	2,5 uur
Schrijven samenvatting	16 januari	0,25 uur
Schrijven kusgetallen	20 januari	2 uur
Afschrijven kusgetallen en inleiding	21 januari	2,5 uur
Maken slides voor presentatie + voorbereiden presentatie	21 januari	2 uur
		95,25 uur

Logboek Jesse

Wanneer?	**Waar?**	**SBU**	**Wat?**	**Resultaat**
Voor zomervakantie	Revius Lyceum	0,5	Gesprek over onderwerp	Geprek met Meneer De Zwaan over onderwerpkeuze.
19/09/06 - 9.00-9.45	Newton	0,75	Vaststellen onderwerpen + Centrale introductie	Onderwerp vastgesteld: Dimensies
19/09/06 - 9.45-11.15	Newton	1,5		http://www.tenthdimension.com/flash2.php http://www.rmcybernetics.com/science/physics/dimensions_infinite_universe.htm http://en.wikipedia.org/wiki/Tesseract
2/10/06 - 9.15-12.15	Newton	3		Gemaakt excel
3/10/06 - 16.30-18.30	Newton	2	Gesprek Aad	2 artikelen + uitleg
9/10/06 - 9.00-10.45	Newton	1,75	Lezen Artikelen	Gelezen: Martin Gardner: "The Church of the Fourth Dimension" Robert A. Heinlein: "And He Built a Crooked House"

9/10/06 11.00-12.15	Newton	1,25		
15/10/06 18.15-18.30	Thuis	0,25	Mailen over Thesis onderwerp	
16/10/06 9.00-12.00	Newton	3	Uitwerken reeksen en formules+Formulier 1	Reeksen uitgewerkt in bestand en Formulier 1 afgemaakt en opgestuurd naar groepsleden.
6/11/06 9.15-12.15	Newton	3	Onderzoek naar dualiteit Onderzoek naar Schlafi notaties	http://news.bbc.co.uk/1/hi/sci/tech/3175352.stm http://users.tkk.fi/~ppuska/mirror/Lounesto/4D http://www.paideiaschool.org/TeacherPages/Steve_Sigur/resources/reflections%20on%20duality.pdf Goede definitie dualiteit in Wikipedia artikel Schlafli http://www.science.uva.nl/onderwijs/wns/onderwijsCD/symmetrie/syllabus/jsindex.html?http://www.science.uva.nl/onderwijs/wns/onderwijsCD/symmetrie/syllabus/node116.html
13/11/06	Newton	3	Onderzoek combinatoriek + Kussende cirkels	http://www.cse.unl.edu/~choueiry/S06-235/files/Combinatorics-HandoutNoNotes.pdf
14/11/06	Newton	3,75	Onderzoek Euler + Begin 24-cel + Inventariseren hoofdstukken verslag	Hoofdstukken verslag geinventariseerd en op een rijtje gezet om te kunnen verdelen. Onderwerp fractals toegevoegd. Begin 24-cel in cabri. Onderzoek Euler niet veel opgeschoten.
20/11/06	Newton	4,25	Onderzoek 24-cel	24-cel gemaakt in Cabri aan de hand van stappenplan Aad, en bouwplan 24cel

				gemaakt aan de hand van 6 octaeders (van papier)
21/11/06	Newton	2	Bespreking Aad	Formules rijen, dualiteit besproken
27/11/06	Newton	8,5	Schrijven combinatoriek+somformules	Roderik geholpen met Combinatoriek schrijven. Zelf: Somformules geschreven. Nakijken tekst inleiding Anne-Lotte.
28/11/06	Newton	3	Onderzoek Euler en bespreking Aad	http://www.math.ubc.ca/~cass//courses/m308-03b/projects-03b/wagner/Webpage.htm Bespreking met Aad. Kijken naar Euler in de 4de dimensie
04/12/06	Newton	3,25	Bezig met Dualiteit	Gelezen Banchoff en figuren gemaakt in Cabri.
08/12/06	Thuis	0,25	Nakijken inleiding	Inleiding nagekeken
09/12/06	Thuis	0,5	Somformules	Begonnen met bewijs somformules dmv vollledige inductie
09/12/06	Thuis	1,25	Regelmatige veelvlakken	Lezen Banchoff en schrijven hoofdstuk regelmatige veelvlakken
09/12/06	Thuis	0,5	Kusgetallen	Anne-Lotte geholpen met kusgetallen
09/12/06	Thuis	0,75	Regelmatige veelvlakken lezen en bouwen	http://64.233.183.104/search?q=cache:1cZD1v_HneoJ:www.cs.sunysb.edu/~cse125/notes/08-4D-Forms.ppt+net+polytopes&hl=nl&gl=nl&ct=clnk&cd=7 http://www.kidzlab.nl/images/stories/knutsel/veelvlakken/printmodellen/bouwplaten%20regelmatige%20veelvlakken.pdf
09/12/06	Thuis	1,00	Bouwen modellen veelvlakken	
11/12/06	Newton	4,25	Overzicht+Euler	Geschreven aan Stelling van Euler
14/12/06	Thuis	1,5	Regelmatige veelvlakken	Geschreen over regelmatige veelvlakken
16/12/06	Thuis	5	Afronden stukken	Afronden somformules, dualiteit, Euler, reglmatige veelvlaken en de thesis in een bestand zetten. Doorgemaild naar Roderik.
08/01/07	Newton	2	Bekijken commentaar	

09/01/07	Freudenthal Instituut	2	Bespreking Aad	Bespreking over aanpassen van de volgorde van de Thesis. Meer nadruk op Hyperkubus.
13/01/07	Thuis	0,75	Nakijken Thesis 'Gamebedrijven'	Helemaal doorgelezen
14/01/07	Thuis	0,75	Nakijken Thesis 'Gamebedrijven'	Commentaar geschreven
15/01/07	Newton	2,5	Commentaar verwerken	Commentaar verwerken en commentaar afmaken thesis 'Gamebedrijven'
15/01/07	Newton	3	Commentaar verwerken	Commentaar verwerken
15/01/07	Freundenthal Instituut	2	Bespreking Aad	Bespreking met Aad over afmaken verslag
18/01/07	Revius Lyceum	0,75	Bespreking groepje	Bespreking over presentatie en uiteindelijke versie verslag.
20/01/07	Thuis	1,5	Layout verzorgen	Begin gemaakt met layout
21/01/07	Thuis	2	Layout verzorgen	Layout maken
21/01/07	Thuis	4,5	Layout en stukjes corrigeren	Eigen stukjes verbeteren en layout afmaken
Totaal		**81,5**		

Logboek Roderik

Wanneer?	**Waar?**	**SBU**	**Wat?**	**Resultaat**
19/09/06	Newton	0,75	Vaststellen onderwerpen + Centrale introductie	Onderwerp vastgesteld: Dimensies
19/09/06	Newton	1,5		http://www.tenthdimension.com/flash2.php http://www.rmcybernetics.com/science/physics/dimensions_infinite_universe.htm http://en.wikipedia.org/wiki/Tesseract
22/09/06	Thuis	2,5	Lezen ‘Flatland’	
23/09/06	Thuis	2.5	Lezen ‘Flatland’	
2/10/06	Newton	3	Werken aan reeksen	Reeksen opgesteld mbv Excel
3/10/06	Newton	2	Gesprek Aad	2 artikelen + uitleg + Inzicht in de Vierde

				Dimensie van Nothing All
5/10/06	Revius Lyceum	2,5	Lezen Boek	Gelezen eerste hoofdstukken van Nothing All: “Inzicht in de vierde dimensie”
9/10/06	Newton	1,75	Lezen Artikelen	Gelezen: Martin Gardner: "The Church of the Fourth Dimension" Robert A. Heinlein: "And He Built a Crooked House"
9/10/06	Newton	1,25	Lezen Boek	Gelezen enkele hoofdstukken van Nothing All: “Inzicht in de vierde dimensie”
14/10/06	Thuis	1,5	Lezen Boek	Gelezen enkele hoofdstukken van Nothing All: “Inzicht in de vierde dimensie”
16/10/06	Newton	3	Uitwerken reeksen en formules+Formulier 1	Reeksen uitgewerkt in bestand en Formulier 1 afgemaakt en opgestuurd naar groepsleden.
6/11/06	Newton	3	Onderzoek naar dualiteit Onderzoek naar Schlafi notaties	http://news.bbc.co.uk/1/hi/sci/tech/3175352.stm http://users.tkk.fi/~ppuska/mirror/Lounesto/4D http://www.paideiaschool.org/TeacherPages/Steve_Sigur/resources/reflections%20on%20duality.pdf Goede definitie dualiteit in Wikipedia artikel Schlafli http://www.science.uva.nl/onderwijs/wns/onderwijsCD/symmetrie/syllabus/jsindex.html?http://www.science.uva.nl/onderwijs/wns/o

				nderwijsCD/symmetrie/syllabus/node116.html
13/11/06	Newton	3	Onderzoek combinatoriek + Kussende cirkels	http://www.cse.unl.edu/~choueiry/S06-235/files/Combinatorics-HandoutNoNotes.pdf
14/11/06	Newton	3,75	Onderzoek Euler + Begin 24-cel + Inventariseren hoofdstukken verslag	Hoofdstukken verslag geinventariseerd en op een rijtje gezet om te kunnen verdelen. Onderwerp fractals toegevoegd. Begin 24-cel in CABRI. Onderzoek Euler niet veel opgeschoten.
20/11/06	Newton	4,5	Gewerkt aan 24-cel	Aads stappenplan gevolgd en beëindigd. Bouwplaat 24-cel gemaakt. Afspraak met Aad voor morgenmiddag.
21/11/06	Newton	2	Overleg met Aad	Aad laten zien wat we tot nu toe gedaan hebben. Uitleg over hoe we CABRI beter kunnen gebruiken. Dualiteit en combinatoriek besproken.
27/11/06	Newton	8	Gewerkt aan combinatoriek	Bewijzen voor de formules van simplex en kubus, begonnen met kruisfiguren.
28/11/06	Newton	3	Gesprek met Aad en gewerkt aan de bewijzen.	Met Aad overlegd wat we tot nu toe gedaan hebben, raad gevraagd bij bewijzen en formule van Euler.
04/12/06	Newton	3,75	Combinatoriek (uitleg formules, bewijzen van de formules) afgerond.	Formules gegeven, en bewezen. Hierna verder met het uitleggen van de 24 cel.
10/12/06	Thuis	0,25	24 cel	Begonnen met uitleg 24 cel
11/12/06	Newton/Thuis	5	24 cel, weergaves	Het stukje over de 24 cel afgemaakt, begonnen met het hoofdstuk weergaves. Sites die hierover informatie geven: • http://en.wikipedia.org/wiki/Schlegel_diagram • http://en.wikipedia.org/wiki/Net_%28polyhedron%29 • http://www.cs.sunysb.edu/~cse125/notes/08-4D-Forms.ppt
12/12/06	Thuis	1,5	weergaven	Verder gewerkt aan het hoofdstuk

				weergaven, Schläfli notatie, Schlegel diagrammen, Cartesische coördinaten en uitslagen zijn nu af.
13/12/06	Thuis	2	weergaven	• http://www.steelpillow.com/polyhedra/vertex_figures/VertexFigures.htm#intro hoofdstuk weergaven is af.
15/12/06	Thuis	0,25	e-mail	Contact met Anne-Lotte en Jesse over de voortgang
17/12/06	Thuis	8	Nakijken van verslag, schrijven conclusie en bronnenlijst	Verslag nagekeken, wat we nu hebben iig, conclusie praktisch af, mijn deel bronnenlijst ook, toepassingen en abstract moeten nog.
18/12/06	Newton	3,25	Schrijven toepassingen en abstract..	Het concept verslag is nu klaar!
08/01/2007	Newton	2	Doorlezen Aad's commentaar	Lijstje gemaakt met commentaar op mijn stukjes, afspraak met Aad voor morgen
09/01/2007	Freudenthal Instituut	2	Gesprek met Aad over het commentaar	Meer inzicht in wat we aan moeten passen.
15/01/2007	Newton en Freudenthal instituut	6	Commentaar gegeven op thesis van Zhu, Koen en Simon. Aan Aads commentaar gewerkt en gesprek met Aad.	Laatste gesprek met Aad. Indeling verslag veranderd. Commentaar nu helemaal begrepen. Deadline voor verslag gesteld: as donderdag.
16/01/2007	Newton	0,25	Samenvatting geschreven.	Samenvatting op ftp-server.
17/01/2007	Thuis	4	Aanpassen weergaves, combinatoriek behalve somformules.	Deze stukken samengevat, 24 cel, toepassingen en het schrijven van de hyperkubus moet nog
18/01/2007	Revius	0.75	Overleg over de presentatie	Taakverdeling gemaakt
19/01/2007	Thuis	2	Aanpassen 24 cel en toepassingen en schrijven hoofdstuk hyperkubus	Al mijn delen zijn aangepast. Hyperkubus is geschreven. Alles op de mail gezet.
21//01/07	Thuis	3,5	Maken powerpoint presentatie, aanpassen abstract en updaten logboek.	Powerpoint gemaakt, abstract herschreven.
Totaal		**92,0**		